

APLIKASI GRUP DIHEDRAL D_5 DALAM DETEKSI ERROR

Oleh:

Pardomuan N. J. M. Sinambela

Abstrak

Mendeteksi error dalam suatu permasalahan string alfabet dan digit dapat dilakukan dengan menerapkan aplikasi grup dihedral. Salah satu metode yang digunakan adalah dengan menggunakan grup dihedral D_5 . Metode ini dapat mendeteksi sekitar 90% dari semua tipe error. D_5 merupakan grup dihedral yang dapat digunakan dalam mendeteksi error yang dapat digunakan untuk mendeteksi error pada string alfabet dan digit yang terdiri atas beberapa karakter. Setiap anggota D_5 yang berupa transformasi dipasangkan dengan tepat satu karakter.

Kata kunci: *Grup Dihedral*

PENDAHULUAN

Ada berbagai cara menambahkan cek digit pada suatu nomor identifikasi untuk dapat mendeteksi error nomor identifikasi tersebut. Satu diantaranya adalah metode International Standard Book Number (ISBN) yang menggunakan modulo 11. Tetapi dalam penggunaan metode ini diperlukan karakter abjad X untuk menggantikan bilangan 10. Pada akhir tahun 1960-an, ditemukan cara mendeteksi kesalahan digit suatu nomor identifikasi tanpa menambahkan suatu karakter baru. Metode ini menggunakan grup D_5 dan permutasi $\sigma = (0)(14)(23)(58697)$.

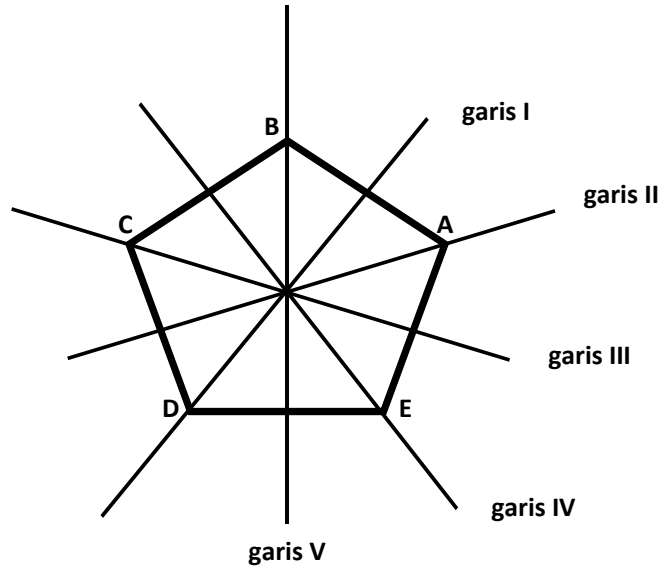
PEMBAHASAN

Grup Dihedral Berorder 10 (D_5)

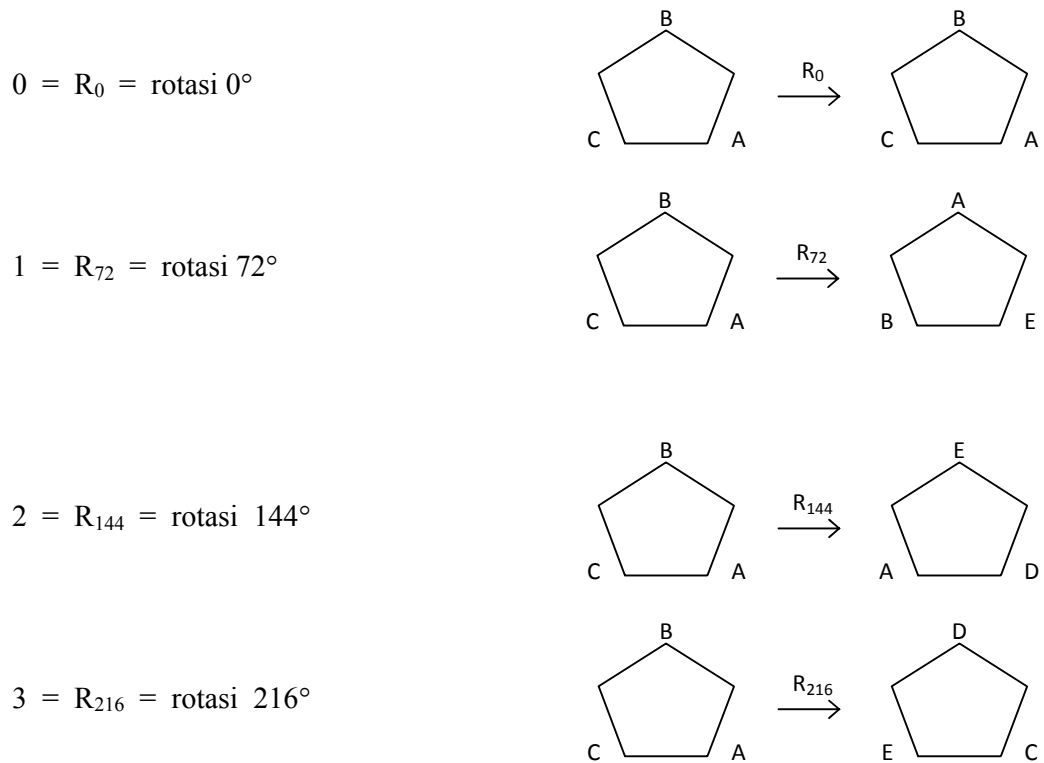
Grup dihedral berorder 10 yang dinotasikan dengan D_5 , disebut juga grup

simetri segilima beraturan. Grup D_5 adalah himpunan semua transformasi yang mengakibatkan segilima beraturan invarian (berimpit dengan dirinya sendiri), beserta operasi *.

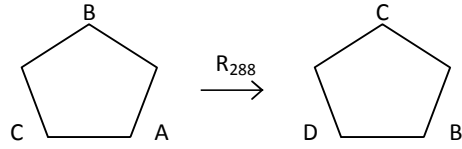
Himpunan D_5 terdiri atas 10 transformasi yang meliputi 5 rotasi dan 5 refleksi. Rotasi yang dipergunakan adalah rotasi berlawanan arah jarum jam terhadap titik pusat segilima. Kelima rotasi itu adalah R_0 , R_{72} , R_{144} , R_{216} , dan R_{288} . Sedangkan refleksi yang dipergunakan adalah refleksi terhadap garis I, II, III, IV, dan V yang masing-masing dinotasikan sebagai M_I , M_{II} , M_{III} , M_{IV} , dan M_V . Letak garis-garis tersebut pada segilima beraturan ABCDE digambarkan sebagai berikut.



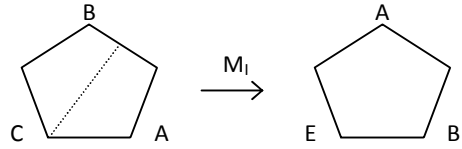
Berikut ilustrasi anggota-anggota D_5



4 = R_{288} = rotasi 288°



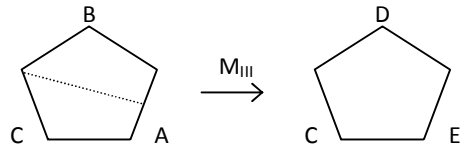
5 = M_I = refleksi terhadap garis I



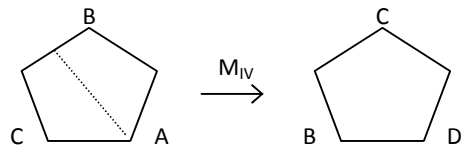
6 = M_{II} = refleksi terhadap garis II



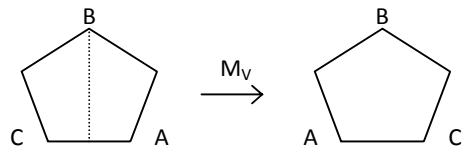
7 = M_{III} = refleksi terhadap garis III



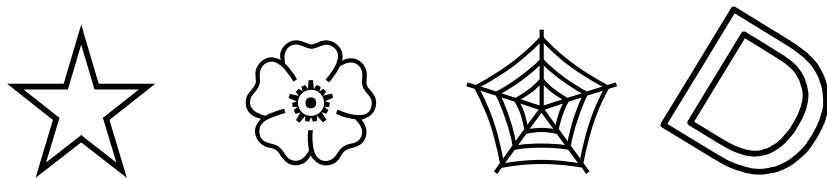
8 = M_{IV} = refleksi terhadap garis IV



9 = M_V = refleksi terhadap garis V



Pola dari D_5 dapat dijumpai pada bintang laut. Gambar-gambar berikut juga menggunakan pola D_5 .

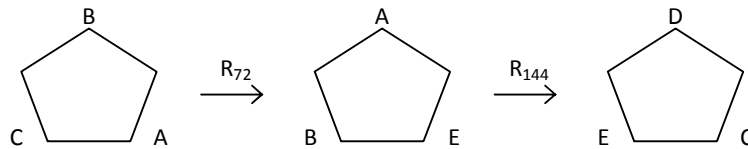


Operasi $*$ didefinisikan sebagai operasi “diikuti oleh”. $A * B$ adalah

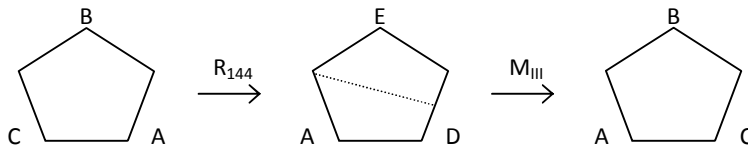
transformasi A *diikuti oleh* transformasi B . Operasi ini tidak komutatif.

Contoh

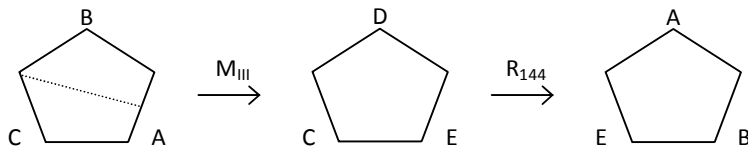
1. $R_{72} * R_{144} = R_{216}$ atau $1 * 2 = 3$



2. $R_{144} * M_{III} = M_V$ atau $2 * 7 = 9$



3. $M_{III} * R_{144} = M_I$ atau $7 * 2 = 5$



Berikut Tabel Cayley untuk D_5 dengan operasi $*$

$*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	0	6	7	8	9	5
2	2	3	4	0	1	7	8	9	5	6
3	3	4	0	1	2	8	9	5	6	7
4	4	0	1	2	3	9	5	6	7	8
5	5	9	8	7	6	0	4	3	2	1
6	6	5	9	8	7	1	0	4	3	2
7	7	6	5	9	8	2	1	0	4	3
8	8	7	6	5	9	3	2	1	0	4
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabel Cayley dapat dipergunakan untuk menunjukkan bahwa D_5 dengan operasi $*$ memenuhi sifat tertutup, memiliki unsur identitas yaitu $R_0(0)$, dan setiap anggota D_5 mempunyai invers yang juga anggota D_5 . Kesepuluh transformasi anggota D_5 dapat dipandang sebagai fungsi dari segilima beraturan ke bidang segilima beraturan itu sendiri, dan operasi $*$ merupakan komposisi fungsi. Karena komposisi fungsi bersifat asosiatif, berarti operasi $*$ juga bersifat asosiatif. Dan karena telah ditunjukkan bahwa operasi $*$ tidak komutatif, maka D_5 dengan operasi $*$ adalah grup non-Abelian.

Permutasi σ

Permutasi suatu himpunan A adalah fungsi bijektif dari himpunan A ke himpunan A sendiri. Permutasi dapat disajikan dalam notasi baris atau notasi siklis (bentuk sikel).

Permutasi yang digunakan dalam tulisan ini adalah permutasi σ dari himpunan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Setiap anggota himpunan A mewakili tepat satu anggota himpunan D_5 .

Penyajian permutasi σ dalam notasi baris adalah sebagai berikut

$$\text{Permutasi } \sigma = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \right]$$

Penyajian permutasi σ dalam notasi siklis adalah sebagai berikut

$$\text{Permutasi } \sigma = (0)(14)(23)(58697)$$

Cek Digit

Metode penambahan cek digit pada nomor identifikasi yang dibahas dalam tulisan ini menggunakan D_5 dan permutasi σ .

Untuk menentukan cek digit dari suatu nomor identifikasi, setiap digit pada nomor identifikasi diberi bobot pangkat σ yang terus meningkat, dimulai dari digit paling kanan. Bilangan-bilangan yang diperoleh dioperasikan menggunakan operasi $*$, invers dari hasil akhir setelah pengoperasian menjadi cek digit dari nomor identifikasi tersebut.

Berikut contoh penentuan cek digit untuk nomor identifikasi 793.

1. Setiap digit pada nomor identifikasi diberi bobot pangkat σ yang terus meningkat, dimulai dari digit paling kanan.

$$\sigma^3 = 2$$

$$\sigma^2 9 = \sigma(\sigma 9) = \sigma 7 = 5$$

$$\sigma^3 7 = \sigma(\sigma(\sigma 7)) = \sigma(\sigma 5) = \sigma 8 = 6$$

2. Bilangan-bilangan yang diperoleh dioperasikan menggunakan operasi $*$

$$6 * 5 * 2 = 3$$

3. Bilangan hasil operasi diinverskan

$$3^{-1} = 2$$

Invers dari hasil akhir setelah pengoperasian ini menjadi cek digit dari nomor identifikasi. Dengan demikian nomor identifikasi yang dilengkapi dengan cek digit adalah 7932.

PENUTUP

Berdasarkan cara menentukan cek digit suatu nomor identifikasi yang telah diuraikan, maka suatu nomor identifikasi bebas error lengkap dengan cek digitnya yang berbentuk $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ mempunyai sifat

$$\sigma^n a_n * \sigma^{n-1} a_{n-1} * \dots * \sigma a_1 * a_0 = 0 \quad \dots(\star)$$

Jika terjadi single digit error atau kesalahan penulisan meskipun hanya satu angka dari nomor identifikasi, maka hasil operasi tidak akan sama dengan 0. Hal ini disebabkan setiap faktor dari ruas kanan persamaan (\star) mempunyai peran yang unik (khusus) dalam menentukan hasil operasi.

Jika terjadi transposition error atau kesalahan berupa pertukaran tempat digit nomor identifikasi juga akan cepat terdeteksi, karena untuk 2 digit a dan b yang berbeda, $\sigma a * b \neq \sigma b * a$ (grup D_5 adalah grup non-Abelian), berarti $\sigma^{i+1} a * \sigma^i b \neq \sigma^{i+1} b * \sigma^i a$. Dengan demikian jika terjadi pertukaran tempat 2 digit yang berdekatan dalam suatu nomor identifikasi, maka hasil operasi tidak akan sama dengan 0.

DAFTAR PUSTAKA

- Durbin, J.R. (1992). *Modern Algebra An Introduction Thrid Edition*. New York. John Wiley & Sons, Inc.
- Gallian, Joseph A. (1990). *Contemporary Abstract Algebra 2nd Edition*. Toronto: D.C. Heath and Company.
- Raisinghania, M.D & Aggarwal, R.S (1980). *Modern Algebra*. New Delhi. S. Chand & Company Ltd.