METODE PENGEMBANGAN PENDEKATAN RATA- RATA SAMPEL UNTUK PROGRAM STOKASTIK DUA TAHAP

Faridawaty Marpaung

Abstrak

Penelitian ini mengemukakan metode pengembangan pendekatan rata –rata sampel untuk program stokastik dua tahap. Metodologi ini menggunakan rata–rata program stokastik melalui sampel, dan pemecahan rata–rata masalah melalui sebuah algoritma optimal. Tujuan dari skema ini akan menghasilkan sebuah penyelesaian optimal untuk masalah yang sebenarnya dengan pendekatan sebuah eksponensial yang cepat sebagai ukuran sampel yang fix

Kata kunci : *Rata – rata sampel, program stokastik dua tahap*

A. PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Program stokastik adalah merupakan program matematika, dimana beberapa data yang termuat pada tujuan atau kendala mengandung ketidakpastian yang dicirikan oleh distribusi peluang pada parameter. Dalam persoalan program stokastik adalah membuat sebuah keputusan sekarang dan meminimumkan biaya rata-rata harapan sebagai konsekuensi dari keputusan, paradigma ini dikenal sebagai model *recourse.* Peubah keputusan problem program stokastik dua-tahap dipartisi menjadi dua himpunan. Peubah tahap pertama ditentukan sebelum melakukan realisasi parameter tak pasti. Kemudian, satu kejadian acak yang muncul sendiri, selanjutnya, desain atau perbaikan pengawasan operasi dapat berbentuk pilihan, pada biaya pasti, nilai tahap kedua atau peubah *recourse*. Tujuan deterministik keputusan tahap pertama sedemikian hingga jumlah biaya tahap pertama dan ekspektasi biaya *recourse* minimum. Formulasi standar dari program stokastik dua tahap sebagai berikut :

$$\min_{x\in X}\{g(x) := c^T x + E[Q(x,\xi(\omega))]\} \quad (1.1)$$

Kendala $Ax = b$

$$x \in R_+^{M_0}$$

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

dengan x adalah keputusan antisipatif tahap pertama yang diambil sebelum peubah acak teramati dan

$$Q(x,\omega) := \inf_{y \in Y}\{q^T y : W_y \geq h - T_x\} \quad (1.2)$$

merupakan nilai optimal dan $\xi := (q, T, W, h)$ menyatakan vektor dari parameter problem tahap kedua. Penelitian ini berkaitan dengan program stokastik dua tahap dengan *recourse* fix, yaitu matriks W adalah tertentu (bukan acak) dan peubah *recourse* dipersyaratkan cacah, yaitu $Y \subseteq Z^{n_2}$ dalam (1.2).

Diperlihatkan dalam Schultz, R. (1995) dua sumber kesulitan dalam menyelesaikan program stokastik dengan *recourse* cacah adalah :

1. Evaluasi eksak dari ekspektasi biaya *recourse*.
2. Mengoptimalkan Ekspektasi biaya *recourse*

Dalam pendekatan yang diajukan, fungsi ekspektasi biaya *recourse* dalam (1.1) diganti oleh pendekatan rata-rata sampel dan problem optimisasi terkait diselesaikan dengan memakai algoritma khusus untuk optimisasi tak konveks. Disini dianalisis laju konvergensi dari Pendekatan Rata–rata Sampel (PRS) untuk program stokastik dengan *recourse* cacah.

2. Perumusan Masalah

Untuk menentukan $E[Q(x,\xi(\omega))]$ pada persamaan (1.1) secara eksak sulit dilakukan sehingga dilakukan pendekatan yang baik bagi $E[Q(x,\xi(\omega))]$

3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan metode pendekatan rata-rata sampel untuk program stokastik dua tahap.

4. Metodologi Penelitian

Program stokastik dua tahap berisi vektor deterministik. Pada tahap pertama penyelesaian persoalan rencana awal deterministik akan dibuat. Pembentukan rencana awal deterministik dilakukan sebelum kondisi acak dari persoalan ditentukan. Sebuah vector acak pada penyelesaian persoalan yang sesuai digunakan untuk merencanakan kompensasi divergensi, spesifikasi

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

parameter dari persoalan akan muncul pada tahap kedua. Selanjutnya juga dibahas metode Pendekatan Rata-rata Sampel (PRS) yang digunakan pada tahap pertama bertujuan untuk mengestimasi ekspektasi fungsi nilai $E[Q(x,\xi(\omega))]$ oleh fungsi rata-rata sampel $N^{-1}\sum_{n=1}^{N} Q(x,\xi^n)$.

Pada bagian akhir dibahas Algoritma *Branch and Bound* yang mengeksploitasi sifat struktural dengan mempartisi ruang pencarian sepanjang harga χ

B. TINJAUAN PUSTAKA

1. Metode Pendekatan Rata – rata Sampel (PRS)

Suatu sampel $\xi^1,\ldots,\xi^N$ dari N realisasi vektor acak dibentuk dan akibatnya ekspektasi fungsi nilai $E[Q(x,\xi(\omega))]$ diestimasi oleh fungsi rata – rata sampel $N^{-1}\sum_{n=1}^{N} Q(x,\xi^n)$. aproksimasi rata – rata sampel yang diperoleh

$$\min_{x\in X}\left\{\hat{g}_N(x) := c^T x + N^{-1}\sum_{n=1}^{N} Q(x,\xi^n)\right\} \qquad (2.1)$$

$\hat{v}_N$ dan $\hat{x}_N$ masing – masing menyatakan nilai optimal dan penyelesaian optimal problem PRS (1.1) ; dan v^* serta x^* masing – masing menyatakan nilai optimal dan penyelesaian optimal problem awal (1.1).

Hal penting yang perlu diperhatikan adalah :

i. Apakah $\hat{v}_N$ dan $\hat{x}_N$ konvergen terhadap mitranya v^* dan x^* apabila ukuran sampel N dinaikkan
ii. Jika ya, dapat dianalisis lagi konvergensi, dan karena itu diestimasikan ukuran sampel yang diperlukan memperoleh optimal sebenarnya.
iii. Adalah pendekatan optimisasi yang efisien untuk menyelesaikan problem PRS dengan ukuran sampel yang diinginkan.
iv. Perhatikan bahwa untuk N yang diketahui penyelesaian $\hat{x}_N$ adalah layak dan merupakan calon untuk penyelesaian optimal terhadap

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

problem awal. Apakah dapat diberikan informasi tentang kualitas dari calon penyelesaian ini.

Pertanyaan – pertanyaan diatas telah terjawab untuk program linier stokastik dua – tahap, yaitu apabila peubah tahap pertama dan kedua dalam (1.1) dan (1.2) kontinu. Telah dibuktikan bahwa untuk program linier stokastik dengan sebaran diskrit, suatu penyelesaian optimal dari PRS memberikan penyelesaian optimal eksak dari problem awal dengan peluang mendekati satu secara eksponensial apabila N bertambah oleh (Shapiro and Homem-de-Mello, 2001). Uji statistik untuk memvalidasi calon penyelesaian yang didasarkan pada gap optimalitas Norkin et al. (1998) demikian pula syarat optimalitas (Shapiro end Homen de Mello, 1998) telah diajukan. Lebih lanjut lagi, teknik sampling ini telah diintegrasikan dengan algoritma dekomposisi untuk menyelesaikan program linier stokastik dari berbagai ukuran dengan hasil yang cukup akurat Linderoth et al. (2002). Konvergensi dari pendekatan PRS telah juga diperluas untuk program stokastik dengan himpunan keputusan tahap pertama diskrit dan berhingga Kleywegt et al. (2001).

C. PEMBAHASAN DAN HASIL

Pada bagian ini dibicarakan sifat konvergensi dari estimastor PRS, terutama yang diterapkan pada program dua tahap dengan *recourse* integer . Untuk memakai hasil klasik, seperti Hukum Bilangan Besar, perlu diandaikan bahwa sampel yang dibentuk bersebaran bebas identik (bbi). Namun perlu diperhatikan bahwa sifat konvergensi dapat diturunkan terhadap kondisi lebih luas. Disini diajukan algoritma *Branch* and *Bound* untuk program stokastik integer dua tahap dengan sebaran diskrit peubah integer campuran ditahap pertama dan peubah integer murni di tahap kedua. Konsep dari algoritma ini adalah mengidentifikasi calon penyelesaian dengan berturut-turut mempartisipasi ruang pencarian.

1. Tahap Pertama Diskrit

Metode konvergensi PRS dalam Kleywegt et al. (2001) apabila diterapkan pada program stokastik dengan himpunan keputusan tahap pertama yang berhingga.

Perhatikan program stokastik dua – tahap (1.1) dengan karateristik berikut :

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

i. Himpunan keputusan tahap – pertama X berhingga (tapi mungkin sangat besar)

ii. Fungsi *recourse* $Q(x,.)$ terukur dan $E\,|\,Q(x,\xi(\omega))\}$ berhingga untuk setiap $x \in X$

Dimana v^* dan $\hat{v}_N$, masing – masing menyatakan nilai optimal dari problem awal dan problem PRS. Kemudian untuk $\varepsilon \geq 0$, andaikan X^ε dan $\hat{X}_N^\varepsilon$ menyatakan himpunan penyelesaian ε optimal, masing – masing dari problem awal dan PRS. Khususnya untuk $\varepsilon = 0$ himpunan ini menjadi himpunan X^* dan $\hat{X}_N$ dari penyelesaian optimal problem terkait.

Dapat diperlihatkan bahwa, dengan asumsi (i) dan (ii) diatas, $\hat{v}_N$ merupakan estimator konsisten dari v^*, yaitu $\hat{v}_N$ konvergen dengan peluang satu terhadap v^* jika $N \to \infty$. Juga dengan memakai teori Deviasi besar, diperlihatkan dalam Kleywegt, et al. (2001) bahwa untuk setiap $\varepsilon \geq 0$ dan $\delta \in [0, \varepsilon]$ terdapat konstanta $\gamma(\delta,\varepsilon) \geq 0$

sheingga

$$1 - P\left(\hat{X}_N^\delta \subset X^\varepsilon\right) \leq |\,X\}e^{-N\gamma(\delta,\varepsilon)} \qquad (3.1)$$

Kemudian, dengan pengandaian tambahan (yang selalu berlaku dalam kasus dimana sebaran $\xi(\omega)$ mempunyai support berhingga), konstanta $\gamma(\delta,\varepsilon)$ positif, dan untuk δ dan ξ kecil dapat diestimasi sebagai

$$\gamma(\delta,\varepsilon) \geq \frac{(\varepsilon^* - \delta)^2}{3\sigma^2} \geq \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{3\sigma^2} \qquad (3.2)$$

Dengan $\varepsilon^* := \min_{x \in X | X^{\varepsilon g}} g(x) - v^*$ dan σ^2 dan σ^2 adalah variansi maksimal dari selisih tertentu antara nilai fungsi objektif problem PRS. Perhatikan bahwa, karena himpunan X berhingga, ε^* selalu lebih besar daripada ε, dan akibatnya $\gamma(\delta,\varepsilon) \geq 0$, bahkan jika $\delta = \varepsilon$. Secara khusus, untuk $\delta = \varepsilon = 0$, pertidaksamaan (3.1) memberikan laju eksponensial konvergensi dari peluang kejadian $\{\hat{x}_N \in X^*\}$ adalah satu, untuk setiap pilihan nilai optimal $\hat{x}_N$ dari problem PRS.

Begitupun, untuk daerah layak X besar (tapi berhingga) selisih $\varepsilon^* - \varepsilon$ cenderung kecil. Estimasi ruas kanan dari (3.2) mengakibatkan estimasi ukuran sampel $N = N(\varepsilon, \delta, \alpha)$ yang diperlukan untuk menyelesaika problem 'awal' (nilai

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

ekspektasi) dengan peluang $1-\alpha$ dan presisi $\varepsilon > 0$ dengan menyelesaikan problem PRS untuk presisi $\delta \in [0, \varepsilon)$.

$$N \geq \frac{3\delta^2}{(\varepsilon-\delta)^2} \log\left(\frac{|X|}{\alpha}\right) \quad (3.3)$$

Walaupun batasan di atas biasanya terlalu konservatif untuk dipakai dalam perhitungan ukuran sampel, ia memperlihatkan ketergantungan logarithma dari $N(\varepsilon, \delta, \alpha)$ pada ukuran $|X|$ dari problem tahap pertama.

Hasil diatas tidak membuat asumsi berkenaan dengan peubah *recourse*. Jadi analisis di atas secara langsung terpakai pada program stokastik dua – tahap dengan *recourse* cacah asalkan himpunan keputusan layak tahap – pertama berhingga.

2. Tahap Pertama Kontinu

Hasil konvergen tadi dapat disesuaikan yang berkaitan dengan kasus dimana beberapa atau semua peubah dapat mengambil nilai kontinu. Perhatikan bahwa dua norm sembarang pada ruang berdimensi berhingga R^{n_1} adalah ekivalen untuk alasan teknis bentuk $\|x\| := \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1}|\}$ dapat dipakai. Andaikan himpunan X terbatas (tidak perlu berhingga) dari R^{n_1}. Untuk suatu $v > 0$ diketahui, pandang himpunan bagian berhingga X_v dari X sehingga untuk setiap $x \in X$ terdapat $x' \in X_v$ yang memenuhi $\|x - x'\| \leq v$. Jika D diameter dari himpunan X, maka himpunan X_v demikian dapat dibentuk dengan $|X_v| \leq \left(D/v\right)^{n_1}$. Dengan menciutkan himpunan layak X ke himpunan bagiannya X_v, sebagai konsekuensi dari (6) diperoleh estimasi berikut tentang ukuran sampel, yang dikehendaki untuk menyelesaikan problem tereduksi dengan akurasi $\varepsilon' > \delta$

$$N \geq \frac{3\delta^2}{(\varepsilon'-\delta)^2}\left(n_1 \log\frac{D}{v} - \log\alpha\right) \quad (3.4)$$

Kemudian andaikan bahwa fungsi ekspektasi $g(x)$ Lipschitz kontinu pada X modulus L. Maka suatu penyelesaian ε'- optimal dari problem tereduksi merupakan penyelesaian ε' - optimal dari problem (1), dengan $\varepsilon = \varepsilon' + Lv$. Buat $v := (\varepsilon - \delta)/2L$ dan $\varepsilon' = \varepsilon - Lv = \varepsilon - (\varepsilon - \delta)/2$.

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

$$N \geq \frac{12\delta^2}{(\varepsilon-\delta)^2}\left(n_1 \log \frac{2DL}{\varepsilon-\delta} - \log \alpha\right) \quad (3.5)$$

Estimasi (3.5) ini memperlihatkan bahwa ukuran sampel yang diperlukan untuk menyelesaikan problem (1) dengan peluang $1-\alpha$ dan akurasi $\varepsilon > 0$ setelah menyelesaikan problem PRS dengan akurasi $\delta < \varepsilon$, tumbuh secara linier dalam dimensi n, dari tahap pertama problem.

Estimasi (3.5) terpakai langsung pada program stokastik dua – tahap dengan integer *recourse* asalkan ekspektasi nilai fungsi $g(x)$ Lipschitz kontinu. Diperlihatkan dalam Schultz (1995) bahwa dalam kasus program dua-tahap dengan integer *recourse* nilai fungsi ekspektasi $g(x)$ adalah Lipschitz kontinu pada suatu himpunan kompak jika vektor data acak $\xi(\omega)$ mempunyai sebaran kontinu dan beberapa syarat lunak tambahan dipenuhi. Sebaliknya, jika $\xi(\omega)$ mempunyai sebaran diskrit maka $g(x)$ tidak kontinu.

3. Tahap Pertama Kontinu dan Sebaran Diskrit

Program stokastik dua – tahap dengan integer *recourse* apabila vektor data acak bersebaran diskrit dengan dukungan berhingga. Diperlihatkan bahwa dalam hal demikian problem awal dan PRS dapat diformulasikan secara ekivalen sebagai problem pada daerah layak berhingga.

Dengan asumsi berikut :

(A_1). Sebaran dari vektor data acak $\xi(\omega)$ mempunyai dukungan berhingga $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_K\}$ dengan peluang masing – masing $p_1,\ldots,p_K$ setiap realisasi $\xi_k = (q_k, T_k, W, h_k), k = 1,\ldots,K$ dari $\xi(\omega)$ disebut skenario.

Maka nilai ekspektasi $E[Q(x,\xi(\omega))]$ sama dengan $\sum_{k=1}^{K} p_k Q(x,\xi_k)$,

jadi problem awal (1.1) dapat ditulis berikut :

$$\min_{x\in X}\left\{ g(x) := c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k Q(x,\xi_k) \right\} \quad (3.6)$$

disini

$$Q(x,\xi_k) := \inf_{y\in Y}\left\{ q_k^T y : Wy \geq h_k - T_k x \right\} \quad (3.7)$$

dengan $X \subseteq \Re^{n_1}$, $c \in \Re^{n_1}$, $Y \subseteq \Re^{n_2}$, $W \in \Re^{n_1}$, dan untuk semua

$k, q_k \in \Re^{n_2}, T_k \in \Re^{m_2 x n_1}$ dan $h_k \in \Re^{m_2}$

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

Dalam beberapa aplikasi jumlah total skenario K sangat besar , membuat evaluasi tepat dari jumlah $\sum_{k=1}^{K} p_k Q(x, \xi_k)$ tidaklah mungkin. Ini memotivasi kebutuhan pendekatan berbaris sampling untuk menyelesaikan (3.6).

(A_2). Peubah tahap pertama kontinu, dan himpunan kendala X tidak kosong, kompak dan polihedral.

(A_3). Peubah tahap kedua yang integer murni ,yaitu $Y \subseteq Z^{n_2}$ dalam (1.2)

Perhatikan bahwa asumsi peubah tahap pertama kontinu merupakan hal yang wajar. Tahap pertama Integer campuran dapat diatasi dalam kerangka berikut tanpa kesulitan konseptual. Tambahan $(A_1)-(A_3)$ juga diandaikan.

(A_4). $Q(x, \xi_k)$ berhingga $\forall x \in X$ dan $k = 1, \ldots, K$

(A_5). Matriks kendala tahap – kedua integer, yaitu $W \in Z^{m_2 x n_2}$

Asumsi (A_4) berarti bahwa $Q(x, \xi_k) < +\infty$ dan $Q(x, \xi_k) > -\infty$ $\forall x \in X$ dan $k = 1, \ldots, K$. Yang pertama dari dua pertidaksamaan ini dikenal sebagai sifat *recourse* relatif lengkap Wets (1996) karena X kompak, *recourse* relatif lengkap selalu dapat dicapai dengan menambahkan penalti peubah antifisial pada problem tahap kedua. Asumsi (A_5) dapat dipenuhi dengan pemberian skala yang sesuai apabila elemen matriks rasional. Pada asumsi (A_3) diperoleh bahwa, untuk setiap $\xi \in EQ(., \xi)$ merupakan nilai fungsi optimal dari program integer murni dan dikenal sebagai konstan perbagian yaitu, untuk setiap $Z \in Z^{n_2}$ dan $\xi \in E$ fungsi $Q(., \xi)$ konstan pada himpunan Schultz et al. (1998)

$$C(z, \xi) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_1} : h - z - 1 \leq Tx < h - z \right\} \quad (3.8)$$

dengan notasi "≤" dan "<" terpakai per komponen. Maka akibatnya untuk setiap $z \in Z^{n_2}$ fungsi $\sum_{k=1}^{K} p_k Q(., \xi_k)$ konstan pada himpunan $C(z) := \cap_{k=1}^{K} C(z, \xi_k)$. Perhatikan bahwa $C(z)$ daerah polihedral yang tidak terbuka ataupun tertutup sekarang, andaikan $Z := \left\{ z \in Z^{m_2} : C(z) \cap X \neq \subseteq \phi \right\}$

Karena X terbatas oleh asumsi (A_2), himpunan Z berhingga diperoleh bahwa himpunan X dapat disajikan sebagai gabungan sejumlah berhingga himpunan

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

polihedral $C(z) \cap X$, $z \in Z$. Pada setiap himpunan $C(z) \cap X$ ekspektasi nilai fungsi $g(x)$ adalah linier dan nilai optimal dicapai pada suatu titik ekstrim (verteks) dari $C(z) \cap X$. Defenisikan

$$V := \bigcup_{z \in Z} \text{vert}(C(z) \cap X) \qquad (3.9)$$

dengan vert (S) menyatakan himpunan verteks polihedral S. Perhatikan bahwa X adalah polihedral oleh defenisi , jadi dari keberhinggaan Z aktuality himpunan V berhingga . Telah diperlihatkan Schultz et al. (1998) bahwa terhadap asumsi problem (3.6) memiliki penyelesaian optimal $x^* \in V$. Dari hasil ini, maka (3.6) dapat dinyatakan sehingga program stokastik dua – tahap berikut dengan keputusan tahap – pertama berhingga :

$$\min_{x \in V} \left\{ g(x) = c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k Q(x, \xi_k) \right\} \qquad (3.10)$$

Diajukan dalam Schultz et al. (1998) untuk menyelesaikan (3.10) dengan mengenumerasi himpunan berhingga V.

Bagaimana mengestimasi $|V|$. Dari (3.8) jelas bahwa himpunan Z mencakup semua vektor integer z, sehingga untuk h^k fix, komponen ke j dari z, yaitu z_j mengambil nilai $\lfloor h_j^k - T_j x \rfloor$ untuk semua $x \in X$.

Perlihatkan $x := \{x \in \Re^{m_2} : x = T_x, x \in X\}$ dan andaikan D diameter x. Perhatikan karena x kompak, X juga kompak, jadi $D < \infty$. Maka, untuk suatu h^k fix, z_j dapat menjadi bila paling banyak $D+1$ nilai. Jika sekarang, diperhatikan semua K skenario, z_j dapat mengambil $K(D+1)$ nilai yang mungkin. Akibatnya, dapat dibatasi kardinalitas dari Z sebagai $|Z| \le [K(D+1)]^{m_2}$. Sekarang perhatikan untuk sembarang $z \in Z$, sistem

$$cl(C(z)) = \{x \in \Re^{n_1} : x \ge 0, T_x \le h^k - z, T_x \ge h^k - z - 1, \forall k\}$$

$$= \{x \in \Re^{n_1} : x \ge 0, T_x \le \underline{h} - z, T_x \ge \overline{h} - z - 1\}$$

dengan $\underline{h} = \min_k \{h^k\}$ dan $\overline{h} = \max_k \{h^k\}$, operasi maks dan min perbagian. Dengan mengandaikan bahwa $X = \{x \in \Re^{n_1} : Ax \le b, x \ge 0\}$ dimana A matriks $m_1 x n_1$, terdapat untuk sembarang $z \in Z$,

$$cl(C(z)) \cap X = \{x \in \Re^{n_1} : Ax \le b, x \ge 0, T_x \le \underline{h} - z, T_x \ge \overline{h} - z - 1\}$$

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

Sistem diatas terdefenisi paling banyak untuk $n_1 + m_1 + 2m_2$, pertidaksamaan linier (termasuk non – negativitas), jadi paling banyak memiliki

$$\binom{n_1 + m_1 + 2m_2}{n_1} < (n_1 + m_1 + 2m_2)^{m_1 + 2m_2}$$

Titik ekstrim. Jadi diperoleh batas atas kardinalitas dari V, yaitu

$$|V| < [K(D+1)]^{m_2} (n_1 + m_1 + 2m_2)^{m_1 + 2m_2} \qquad (3.11)$$

Jadi kardinalitas dari V, demikian pula usaha yang dibutuhkan dalam mengevaluasi calon penyelesaian $x \in V$. Sebagian besar tergantung pada K. Dengan memakai pendekatan PRS konsiderasi terhadap semua skenario $\{\xi_1, \ldots, \xi_K\}$ dalam dapat dihindari. Pandang sampel $\{\xi^1, \ldots, \xi^N\}$ dari parameter tak pasti problem, dengan ukuran sampel N jauh lebih kecil daripada K. Maka problem PRS yang terkait dengan (3.10) adalah :

$$\min_{x \in V_n} \left\{ \hat{g}_{N(x)} = c^T x + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Q(x, \xi^n) \right\} \qquad (3.12)$$

Dengan V_N sampel mitra dari himpunan V yaitu,

$$V_n := \cup_{z \in Z_N} \operatorname{vert}(C_N(z) \cap X) \qquad (3.13)$$

Dengan $C_N(z) := \cap_{n-1}^{N} C(z, \xi^n)$ dan $Z_N := \{ z \in Z^{m_2} : C_N(z) \cap x \neq \phi \}$

Perhatikan bahwa himpunan V dan V_N dalam problem (3.10) dan (3.12) tidak sama, himpunan ini masing – masing dinyatakan oleh himpunan Ξ dan himpunan bagian yang disampel dari Ξ. Tidak secara langsung jelas apakah penyelesaian (3.12) termasuk dalam himpunan calon penyelesaian optimal V. Untungnya, karena vektor yang disampel membentuk himpunan bagian dari Ξ, akibatnya $V_n \subset V$. Jadi sembarang penyelesaian untuk (3.12) merupakan calon penyelesaian optimal terhadap problem awal. Sekarang dapat secara langsung diterapkan hasil konvergensi eksponensial dari (4.10) terhadap program stokastik dengan *recourse* integer dan peubah tahap pertama kontinu. Secara khusus pertidaksamaan (3.1) menjadi

$$1 - P\left(\hat{X}_N^{\delta} \subset X^{\varepsilon}\right) \leq |V| \, e^{-N\gamma(\delta, \varepsilon)} \qquad (3.14)$$

Dimana, seperti sebelumnya $\hat{X}_N^{\delta}$ adalah himpunan penyelesaian secara δ - optimal terhadap problem PRS, X^{ε}

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

adalah himpunan penyelesaian ε-optimal terkadang problem awal, dan konstanta $\gamma(\delta,\xi)$ dapat diestimasi menggunakan (3.2) Dengan memakai (3.14) dan estimasi dari $|V|$ dalam (3.11) dapat ditentukan ukuran sampel untuk problem PRS yang menjamin suatu penyelesaian ε- optimal terhadap problem awal dengan peluang $1-\alpha$ sebagai berikut .

$$N \geq \frac{3\delta^2}{(\varepsilon-\delta)^2}(m_2 \log[K(D+1)]) + (m_1+2m_2)(n_1+m_1+2m_2) - \log\alpha)$$

(3.15)

Walaupun estimasi ukuran sampel N ini terlalu konservatif untuk tujuan praktis, ia memperlihatkan bahwa N berkembang secara linier terhadap dimensi problem dan secara logarithmically terhadap jumlah skenario K. Ini mengidentifikasikan bahwa dapat diperoleh penyelesaian cukup akurat terhadap problem yang mencakup sejumlah besar skenario dengan memakai ukuran sampel sedikit.

Sekarang perhatikan situasi dimana sebaran 'sebenarnya' dari $\xi(\omega)$ kontinu sedangkan sejumlah berhingga skenario diperoleh dengan diskritisari fungsi sebaran ini. Jika diskritisari demikian cukup baik, maka perbedaan antara nilai ekspektasi terkait dari fungsi objektif kecil, yaitu andaikan η batasan konstan nilai mutlak dari perbedaan antara nilai – nilai ekspektasi $Q(x,\xi(\omega))$, yang diambil terhadap sebaran diskrit dan kontinu dari $\xi(\omega)$, untuk semua $x \in X$. Akibatnya jika $\bar{x}$ merupakan penyelesaian ε-optimal dari problem nilai ekspektasi terhadap salah satu sebaran ini, maka $\bar{x}$ merupakan penyelesaian $(\varepsilon+2\eta)$-optimal dari problem nilai ekspektasi terhadap sebaran lainnya. Karena itu , jika fungsi nilai ekspektasi yang diambil terhadap sebaran kontinu, adalah kontinu Lipschitz pada X, maka estimasi (3.4) dapat diaplikasikan terhadap problema dengan sebaran terdiskritisari yang disesuaikan untuk konstanta yang terkait.

4. Menyelesaikan Problem PRS

Secara prinsip teknik enumerasi Schultz et al. (1998) dapat dipakai untuk menyelesaikan problem PRS (3.12). Namun umumnya sangat sulit untuk mengkarakterisasi himpunan V_N kecuali problem tahap – kedua memiliki struktur sangat sederhana, tambahan lagi kardinalitas V_∞ sangat besar, sehingga enumerasi tidak dimungkinkan secara komputasi. Alternatifnya, dapat dicoba

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

untuk menyelesaikan deterministik ekivalen dari (3.12) dengan memakai algoritma branch and bound. Namun, teknik demikian tidak mencoba untuk mengeksplotasi struktur yang dapat teruraikan dari problem, dan metode ini akan gagal kecuali ukuran sampel kecil. Dekomposisi berbaris algoritma *Branch* and *Bound* yang dihentangkan dalam Ahmed et al. (2000) untuk menyelesaikan problem PRS. Disamping mengkarakterisasi himpunan calon penyelesaian V_n, algoritma ini mengidentifikasi calon penyelesaian dengan berturut – turut mempartisi ruang pencarian. Lebih lanjut lagi , algoritma memanfaatkan informasi batas bawah untuk mengeliminasi bagian daerah pencarian sehingga mencegah enumerasi lengkap.

Karena algoritma tidak secara eksplisit menelusuri V_n, harus dipastikan bahwa penyelesaian akhir yang diperoleh tidak termasuk dalam himpunan ini untuk mencapai konvergensi.

Berikut ini diuraikan algoritma sebagai penambahan terhadap asumsi $(A_1)-(A_5)$, algoritma mengandaikan

(A_6) Matriks teknologi T, yang mengaitkan problem tahap pertama dan kedua adalah deterministik, yaitu $T_k = T$ untuk semua k

Perlihatkan transformasi linier dari peubah problem tahap pertama x dengan memakai T oleh $x := T_x$. Peubah x dikenal sebagai peubah " lunak " dalam literatur program stokastik. Ide prinsip dibelakang algoritma adalah memandang problem PRS dalam peubah lunak.

$$\min_{\chi\in\chi}\left\{\hat{G}_N(\chi) := \Phi(\chi) + \hat{\Psi}_N(\chi)\right\}$$

(3.16)

dimana

$$\Phi(\chi) := \inf_{x\in X}\left\{c^T x : Tx = \chi\right\}, \hat{\Psi}_N(\chi) := N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\Psi_N(\chi, \xi^j n)$$

$$\Psi(\chi,\xi) := \inf_{y\in Y}\left\{q^T y : Wy \geq h - \chi\right\}$$

dan $X := \left\{X \in \Re^{m_2} : X = T_x, x \in X\right\}$

X memiliki dimensi lebih kecil dari pada x. Lebih penting lagi, transformasi ini memberikan struktur tertentu terhadap fungsi diskontinu $\Psi_N(\cdot)$. Khususnya, dapat diperlihatkan Ahmed et al. (2000) bahwa $\Psi_N : \Re^{m_2} \to \Re$ mempunyai sifat berikut :

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

i. Ia tak naik sepanjang setiap komponen X_j , $j = 1,\ldots,m_2$ dari X

ii. Untuk setiap $z \in Z^{m_2}$, ia konstan pada himpunan $C_N(z) := \{X : h^n - z - 1 \leq X \leq h^n - z, n = 1,\ldots,N\}$

Perhatikan bahwa himpunan $C_N(z)$ - dikaitkan dengan himpunan $C_N(z)$ oleh transformasikan $X = T_x$. Juga perhatikan baku $C_N(z)$ adalah hiper – empat persegi karena ia merupakan perkalian kartesian dari interval. Jadi, fungsi nilai ekspektasi tahap kedua $\Psi_N(\cdot)$ konstan perbagian pada daerah empat persegi dalam ruang peubah lunak X . Maka diskontinuitas dari $\Psi_N(\cdot)$ hanya dapat terletak di batas daerah – daerah ini dan, karena itu , semua ortogonal pada sumbu peubah lebih lanjut lagi, karena X kompak, maka X juga kompak. Jadi daerah demikian dalam himpunan layak problem berhingga. Algoritma mengeksploitasi sifat structural di atas dengan mempartisi ruang χ menjadi daerah berbentuk $\prod_{j=1}^{m_2}[l_j, u_j)$, dimana u_j merupakan komponen ke j dari suatu titik χ pada mana fungsi nilai tahap kedua $\hat{\varphi}_N(.)$ diskontinu. Perhatikan bahwa $\hat{\varphi}_N(.)$ hanya dapat diskontinu di suatu titik χ dimana sekurang – kurangnya satu dari komponen vector $h^n - \chi$ merupakan integral untuk beberapa $n = 1, \ldots, N$.

Jadi dipartisi ruang pencarian sepanjang nilai χ demikian. Dibawah ini diberikan pernyataan formal dari algoritma *branch* and *bound* .

Notasi :

$\mathcal{L}$ Daftar subproblem

i Nomor iterasi; juga dipakai untuk mengindikatorkan subproblem terpilih

$\mathcal{P}$ Partisi yang berkaitan dengan i

α^i Batas atas yang diperoleh di iterasi i

β^i Batas bawah pada subproblem i

χ^i Penyelesaian layak untuk nilai subproblem

U Batas atas pada nilai optimal global

L Batas bawah pada nilai optimal global

χ^* Calon optimum global

Algoritma

Inisialisasi

Proses problem dengan membentuk hiper-persegi berbentuk $P^0 := \prod_{j=1}^{m_2}[l_j^0, u_j^0)$ sehingga $\chi \subseteq P^0$.

Tambahkan problem

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

$Min\hat{G}_N(\chi)$ dengan kendala $\chi \in \chi \cap P^0$ untuk mendaftarkan subproblem terbuka $\mathcal{L}$. Buat $U \leftarrow +\infty$ dan penghitung iterasi $i \leftarrow 0$

Iterasi i:

Langkah i.1 : Jika $\mathcal{L} = \emptyset$, berhenti dengan penyelesaian χ^*, jika tidak, pilih subproblem i, yang didefinisikan sehingga $Min\hat{G}_N(\chi)$ dengan kendala $\chi \in \chi \cap P^i$ dari subproblem saat ini. Buat $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L}\backslash\{i\}$

Langkah i.2 : Problem batas bawah β^i yang memenuhi

$\beta^i \leq inf\{\hat{G}_N(\chi): \chi \in \chi \cap P^i\}$ Jika $\chi \cap P^i = \emptyset, \beta^i = +\infty.$ Tentukan penyelesaian layak $\chi^i \in \chi$ dan hitung batas atas $\alpha^i \geq \hat{G}_N(\chi^i)$

Langkah i.2.a : Buat $L \leftarrow min_{l \in \mathcal{L} \cup \{i\}} \beta^l$

Langkah i.2.b : Jika $\alpha^i < U$, maka $\chi^* \leftarrow \chi^i$ dan $U \leftarrow \alpha^i$

Langkah i.2.c : Hentikan daftar subproblem, yaitu $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L}\backslash\{l: \beta^l \geq U\}$

Jika $\beta^i \geq U$ pergi ke langkah $i.1$ dan pilih subproblem lain.

Langkah i.3 : Partisi P^i menjadi $\mathcal{P}^{i_1}$ dan $\mathcal{P}^{i_2}$. Buat $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{i_1, i_2\}$ yaitu persoalan kedua subproblem dari $\hat{G}_N(\chi)$ kendala $\chi \in \chi \cap \mathcal{P}^{i_1}$ dan dari $\hat{G}_N(\chi)$ kendala $\chi \in \chi \cap \mathcal{P}^{i_2}$ ke daftar subproblem terbuka. Untuk tujuan pemilihan $\beta^{i_1}, \beta^{i_2} \leftarrow \beta^i$. Buat $i \leftarrow i + 1$ dan kembali ke langkah i.1

D. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dikembangkan metode pendekatan rata-rata sampel untuk program stokastik dua tahap. Penyelesaian persoalan program stokastik dua tahap berisi vector deterministik . Pada tahap pertama, dibuat penyelesaian persoalan rencana awal deterministik. Pembentukan rencana awal deterministik dilakukan sebelum kondisi acak dari persoalan ditentukan. Pada tahap kedua digunakan sebuah vector acak pada persoalan yang sesuai untuk merencanakan kompensasi divergensi, spesifikasi parameter.

Dua kesulitan dalam menyelesaikan program stokastik adalah :

1. Evaluasi eksak dari ekspektasi biaya *recourse* .

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

2. Mengoptimalkan Ekspektasi biaya *recourse*.

Algoritma *Branch* and *Bound* untuk menyelesaikan problem PRS. Algoritma *Branch* and *Bound* juga mengkaraterisasi himpunan calon penyelesaian dan mengidentifikasi calon penyelesaian dengan berturut – turut mempartisi ruang pencarian. Algoritma memanfaatkan informasi batas bawah untuk mengeliminasi bagian daerah pencarian. Karena algoritma tidak secara eksplisit menelusuri himpunan calon penyelesaian dipastikan bahwa penyelesaian akhir yang diperoleh tidak termasuk dalam himpunan ini untuk mencapai konvergensi.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmed, S. (2000). *Strategic Planning under Uncertainty:Stochastic Integer Programming Approaches. Ph.D. Thesis*, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Ahmed, S., Tawarmalani, M., and Sahinidis, N.V. (2000). *A finite branch and bound algorithm for two stage stochastic integer programs.* Submitted for publication. E-print available in the Stochastic Programming E-Print Series:http://dochost.rz.hu-berlin.de/speps/.

Kleywegt, A. J., Shapiro, A., and Homem-De-Mello,T. (2001). *The sample average approximation method for stochastic discrete optimization*. SIAM Journal of Optimization, 12:479–502.

Linderoth, J., Shapiro, S., and Wright, S. (2002). *The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming*. Optimization Technical Report 02-01, Computer Sciences Department, University of Wisconsin-Madison.

Norkin, V.I., Pflug, Ch., and Ruszczy´nski, A. (1998). *A branch and bound method for stochastic global optimization*. Mathematical Programming, 83:425–450.

Norkin, V.I., Pflug, G.C., and Ruszczynski, A. (1998). *A branch and bound method for stochastic global optimization.* Mathematical Programming, 83:425–450.

Norkin, V.I., Ermoliev, Y.M., and Ruszczynski,A. (1998). *On optimal allocation of indivisibles under uncertainty*. Operations Research, 46:381–395.

Schultz, R. (1995). *On structure and stability in stochastic programs with random technology matrixand complete integer recourse*. Mathematical Programming, 70(1):73–89.

Schultz, R., Stougie,L., and Van der Vlerk,M.H. (1998). *Solving*

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan

stochastic programs with integer recourse by enumeration: A framework using Gr¨obner basis reductions. Mathematical Programming, 83:229–252

Shapiro, A., and Homem de Mello,T. (1998). *A simulation-based approach to two stage stochastic programming with recourse*. Mathematical Programming, 81(3, Ser. A):301–325.

Shapiro,A., and Homem-de-Mello,T. (2001). *On rate of convergence of Monte Carlo approximations of stochastic programs*. SIAM Journal on Optimization,11:70–86.

Wets,R.J-B. (1966). *Programming under uncertainty: The solution set*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 14:1143 – 1151.

Faridawaty Marpaung adalah Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan