

MODEL EPIDEMI SEIR DENGAN LAJU KONTAK JENUH

Tri Andri Hutapea

Abstrak

Epidemik berbagai penyakit pada abad ini, memaksa para ilmuwan berkerja ekstra cepat untuk memahami perilaku penyebaran penyakit yang sedang mengancam keberadaan mahluk hidup di dunia ini. SEIR merupakan salah satu bentuk pemodelan penyakit, yang membagi populasi ke dalam 4 kompartemen yaitu kompartemen rentan (S), kompartemen yang terjangkit tetapi masih laten (E), kompartemen terinfeksi (I), dan kompartemen sembuh dan kebal terhadap penyakit (R). Penularan penyakit diantara individu tergantung pada laju kontak jenuh. Langkah preventif terhadap penyebaran penyakit epidemik adalah menganalisis model matematika penyebaran penyakit kemudian meminimumkan parameter laju kontak jenuh.

Kata Kunci: Model SEIR, Laju Kontak Jenuh, Titik Keseimbangan, Stabil Lokal, Stabil Global.

PENDAHULUAN

Penyebaran suatu penyakit adalah jumlah kasus baru tiap satuan waktu dan berperan penting dalam mempelajari Matematika epidemiologi. Bentuk umum dari penularan penyakit yang tergantung dari ukuran populasi dituliskan $sC(N)\frac{S}{N}I$ dengan S adalah jumlah individu pada kompartemen yang rentan (*susceptible*) pada waktu t dan I jumlah individu pada kompartemen yang

terinfeksi (*infected*) pada waktu t , sedangkan S adalah probabilitas penularan penyakit di antara 2 individu yang melakukan kontak per satuan waktu dan $C(N)$ probabilitas yang tidak diketahui dari suatu individu melakukan kontak tersebut (Chavez). $C(N)$ biasanya disebut laju kontak. $sC(N)$ adalah jumlah rata-rata kontak yang terpenuhi dari suatu individu tiap satuan waktu atau disebut laju kontak jenuh.

Heesterbeek and Metz menurunkan rumus laju kontak jenuh dalam polulasi yang bermacam-macam sebagai berikut:

$$C(N) = \frac{bN}{1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}} \quad (1.1)$$

dengan b adalah suatu konstanta positif yang menyatakan laju kontak jenuh dari hubungan-hubungan perseorangan yang terjadi secara acak dalam sebuah populasi.

Tri Andri Hutapea adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

$$\lim_{N \rightarrow 0} C(N) = \lim_{N \rightarrow 0} \left(\frac{bN}{1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}} \right) = 0 = \lim_{N \rightarrow 0} bN \text{ dan}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{bN}{1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}} \right) = 1$$

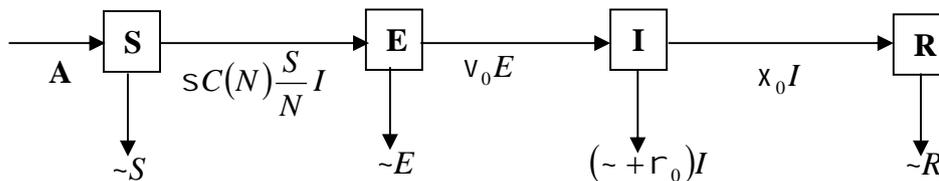
Jadi untuk nilai N yang kecil, $C(N) \approx bN$ dan untuk nilai N yang besar, $C(N) \approx 1$. Dalam tulisan ini akan dikaji tentang model epidemi SEIR dengan rata-rata kontak jenuh $C(N)$ yang didefinisikan pada (1.1) dengan struktur populasi menggunakan rekrutmen dan kematian.

Populasi dibagi menjadi 4 kompartemen yaitu kompartemen rentan (S), kompartemen yang terjangkit tetapi masih laten (E), kompartemen terinfeksi (I), dan kompartemen sembuh dan kebal terhadap penyakit (R). Sebelum memodelkan penyebaran penyakit dengan model $SEIR$, ada beberapa asumsi yang perlu diketahui yang berguna dalam

penyederhaan pembentukan Modelnya, yaitu:

- Laju rekrutmen dan masuk ke kompartemen S
- Laju penularan penyakit yang tergantung dari ukuran populasi $\left(sC(N) \frac{S}{N} I \right)$
- Populasi tidak konstan
- Penyakit memiliki masa laten yang tidak singkat
- Laju kematian alami proporsional terhadap
- Terjadi kematian karena penyakit
- Individu yang sudah sembuh, kebal terhadap penyakit untuk selamanya

Kerangka Model:



Keterangan Parameter:

A : Laju Total rekrutmen

\sim : Laju kematian alami

S : Probabilitas laju penularan penyakit diantara 2 individu yang melakukan kontak per satuan waktu

v_o : Laju individu laten menjadi terinfeksi

χ_o : Laju kesembuhan

Γ_o : Laju kematian karena penyakit.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dengan berbagai dukungan definisi dan teorema.

PEMBAHASAN DAN HASIL

Teori Pendukung

Dalam bukunya, Perko (1991) mendefinisikan suatu sistem

$$\dot{x} = f(x) \tag{a}$$

Dengan $f : E \subset R^n \rightarrow R^n$ fungsi kontinu pada E . Sistem (a) dikatakan linier jika $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ masing-masing linier dalam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan dikatakan nonlinear jika $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ masing-masing nonlinear dalam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Dengan semua asumsi-asumsi dan berdasarkan kerangka model di atas, berikut ini di rumuskan model matematika penyebaran suatu penyakit:

Model Matematika :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - sC(N)\frac{S}{N}I - \sim S \\ \frac{dE}{dt} = sC(N)\frac{S}{N}I - v_o E - \sim E \\ \frac{dI}{dt} = v_o E - \chi_o I - \sim I - \Gamma_o I \\ \frac{dR}{dt} = \chi_o I - \sim R \end{cases} \tag{2.1}$$

Dengan \sim, S, v_o, χ_o , adalah konstanta positif dan Γ_o adalah konstanta non negatif (≥ 0).

Misalkan $h(N) = 1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}$ dan

$$C(N) = \frac{bN}{h(N)}. \text{ Jadi } sC(N)\frac{S}{N}I = \frac{sbSI}{h(N)}.$$

Misalkan $a_o = sb$ maka

$$sC(N) \frac{S}{N} I = \frac{sbSI}{h(N)} = \frac{a_o SI}{h(N)}. \quad \text{Akibatnya}$$

sistem (2.1) berubah menjadi:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{A}{\sim} - \frac{a_o SI}{\sim h(N)} - S \\ \frac{dE}{dt} = \frac{a_o SI}{\sim h(N)} - \left(1 + \frac{v_o}{\sim}\right) E \\ \frac{dI}{dt} = \frac{v_o}{\sim} E - \left(1 + \frac{x_o}{\sim} + \frac{r_o}{\sim}\right) I \\ \frac{dR}{dt} = \frac{x_o}{\sim} I - R \end{cases} \quad (2.2)$$

Misalkan $\sim dt = d\ddagger$; $a = \frac{a_o}{\sim}$; $v = \frac{v_o}{\sim}$; $x = \frac{x_o}{\sim}$; dan $r = \frac{r_o}{\sim}$, akibatnya Sistem (2.2) dapat menjadi:

$$\begin{cases} \frac{dS}{d\ddagger} = \frac{A}{\sim} - \frac{aSI}{h(N)} - S \\ \frac{dE}{d\ddagger} = \frac{aSI}{h(N)} - (1+v)E \\ \frac{dI}{d\ddagger} = vE - (1+x+r)I \\ \frac{dR}{d\ddagger} = xI - R \end{cases} \quad (2.3)$$

Jumlah populasi dapat ditentukan dengan $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ atau dari hasil jumlah dari persamaan diferensial di atas:

$$\frac{dN}{dt} = A - \sim N - r_o I \Leftrightarrow \frac{dN}{d\ddagger} = \frac{A}{\sim} - N - rI$$

Karena $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$

maka

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d(S + E + I + R)}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

atau

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dN}{dt} - \left(\frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \right).$$

Karena $\frac{dS}{dt}$ dapat ditentukan dengan

$\frac{dN}{dt}$, $\frac{dE}{dt}$, $\frac{dI}{dt}$, dan $\frac{dR}{dt}$, maka $\frac{dS}{dt}$ dapat

diganti dengan $\frac{dN}{d\ddagger}$ dengan

$$\frac{dN}{d\ddagger} = \frac{A}{\sim} - N - rI \quad \text{sehingga sistem (2.3)}$$

berubah menjadi:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \frac{a(N - E - I - R)I}{h(N)} - (1 + v)E \\ \frac{dI}{dt} = vE - (1 + \kappa + r)I \\ \frac{dR}{dt} = \kappa I - R \\ \frac{dN}{dt} = \frac{A}{\sim} - N - rI \end{cases} \quad (2.4).$$

Kocak, (1991) mendefinisikan matriks Jacobian suatu sistem non linier.

Definisi 3.1

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$ pada Sistem (a) dengan $f_i \in C^1(E, R), i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Matriks

$$J f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\hat{x}) & \frac{df_1}{dx_2}(\hat{x}) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(\hat{x}) \\ \frac{df_2}{dx_1}(\hat{x}) & \frac{df_2}{dx_2}(\hat{x}) & \dots & \frac{df_2}{dx_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1}(\hat{x}) & \frac{df_n}{dx_2}(\hat{x}) & \dots & \frac{df_n}{dx_n}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian di titik \hat{x} .

Perko (1991), juga mendefinisikan titik ekulibrium suatu sistem persamaan diferensial (linier maupun nonlinier).

Definisi 3.2

Titik $\hat{x} \in R^n$ disebut titik ekulibrium

Sistem (a) jika $f(\hat{x}) = 0$.

ekulibrium hiperbolik. Defenisi titik ekulibrium hiperbolik menurut Perko (1991) adalah sebagai berikut.

Titik ekulibrium $\hat{x} \in R^n$ suatu sistem nonlinier diharapkan merupakan suatu titik

Definisi 3.3

Titik ekulibrium \hat{x} disebut titik ekulibrium hiperbolik dari Sistem (a) jika

semua nilai eigen $J f(\hat{x})$, mempunyai bagian real tak nol.

Selanjutnya, dalam bukunya Perko (1991) mendefinisikan linierisasi suatu sistem

nonlinier dengan matriks Jacobian $J f(\hat{x})$ di sekitar titik ekuilibrium \hat{x} .

Definisi 3.4

Diberikan matriks Jacobian $J f(\hat{x})$,

sistem $\dot{x} = J f(\hat{x})x$ disebut Linierisasi

Sistem (a) di sekitar titik \hat{x} .

Hasil linierisasi suatu sistem nonlinear, yaitu sistem linier selanjutnya akan dikaji kestabilannya (lokal) di sekitar titik

ekuilibrium \hat{x} . Untuk menyimpulkan jenis kestabilan suatu sistem linierisasi berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian $J f(\hat{x})$. Jenis kestabilan suatu sistem linier, Olsder (1994) merumuskannya dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.1

Diberikan $\dot{x} = Ax$, dengan $A_{n \times n}$ matriks bilangan real, mempunyai nilai eigen λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ ($k \leq n$).

a) Titik ekuilibrium \hat{x} dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$.

b) Jika terdapat $i \in (1, 2, \dots, k)$ sehingga $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, maka titik ekuilibrium \hat{x} tidak stabil.

c) Jika (i) $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$.

(ii) Nilai-nilai eigen λ_i dengan $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ bersesuaian dengan vektor eigen bebas linier yang cacahnya sama dengan multiplisitasnya dari λ_i .

maka titik ekuilibrium \hat{x} stabil.

Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan N diperoleh jika $\frac{dN}{dt} = 0$, maka $N_{eq} = \frac{A}{r}$. Untuk populasi

bebas penyakit, $N_{bp} = \frac{A}{r}$ diperoleh jika $I = 0$, karena $r_0 \geq 0 \Leftrightarrow r \geq 0$, maka nilai

$N_{eq} \leq N_{bp} = \frac{A}{r}$. Untuk $t \rightarrow \infty$ berlaku $N(t)$

$\rightarrow N_{eq} \leq \frac{A}{r}$, maka domain sistem dapat

dibatasi pada

$$\Omega = \left\{ (E, I, R, N) \in R_+^4 : 0 \leq E + I + R + N \leq N \leq \frac{A}{r} \right\}$$

dengan R_+^4 menyatakan daerah non negatif di R^4 .

Teorema 3.2

Misalkan $R_0 = \frac{Ava}{(1+x+r)(1+v)h \left(r + bA + \sqrt{1 + 2b \frac{A}{r}} \right)}$.

i. Jika $R_0 \leq 1$ maka Sistem (2.4) hanya memiliki satu titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0, 0, 0, \frac{A}{r} \right)$.

ii. Jika $R_0 > 1$ maka Sistem (2.4) mempunyai dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0, 0, 0, \frac{A}{r} \right)$ dan titik keseimbangan

endemik ($I > 0$), yaitu $P_1 = (E^*, I^*, R^*, N^*)$ dengan $E^* = \frac{u}{rv} \left(\frac{A}{r} - N^* \right)$, $I^* = \frac{1}{r} \left(\frac{A}{r} - N^* \right)$,

$R^* = \frac{x}{r} \left(\frac{A}{r} - N^* \right)$, dan N^* adalah solusi dari persamaan

$$(a - rb)SuN - \left[a(u\check{S} - vr) \frac{A}{r} + ru\check{S} \right] - ru\check{S}\sqrt{1 + 2bN} = 0.$$

Bukti (i):

Dari Sistem (2.4), jika $\frac{dN}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$ dan $\frac{dR}{dt} = 0$, maka diperoleh titik

kesetimbangan bebas penyakit $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0, 0, 0, \frac{A}{\sim}\right)$. Selain itu ditemukan persamaan

berikut ini,

$$\begin{cases} a(N - E - I - R)I = h(N)(1+v)E \\ v E = (1+x+r)I \\ R = x I \\ r I = \frac{A}{\sim} - N \end{cases} \quad (2.5).$$

Bukti (ii):

Dari persamaan kedua pada Persamaan (2.5) diperoleh $E = \frac{1+x+r}{v}I$. Kemudian diselesaikan persamaan pertama diperoleh,

$$a(N - E - I - R) = \frac{u\check{S}}{v}h(N) \quad (2.6)$$

dengan $u = (1+x+r)$ dan $\check{S} = (1+v)$.

Selanjutnya dari persamaan (2.5), dengan mensubstitusikan persamaan kedua, ketiga dan keempat ke $N-E-I-R$, diperoleh,

$$N - E - I - R = \frac{A}{\sim} - \left(\frac{u\check{S}}{v}\right)I.$$

Didefinisikan fungsi F , $F: \left[0, \frac{A}{\sim}\right] \rightarrow R$ dengan

$$F(N) = (a - rb)u\check{S}N - \left[a(\check{S}u - rv)\frac{A}{\sim} + ru\check{S} \right] - ru\check{S}\sqrt{1 + 2bN}.$$

Karena $R_0 > 1$ maka $a - rb > 0$ sehingga $F(0) = -\left[a(u\check{S} - vr)\frac{A}{\sim} + ru\check{S} \right] - ru\check{S} < 0$ dan

$$F\left(\frac{A}{\sim}\right) = (a - rb)u\check{S}\frac{A}{\sim} - \left[a(\check{S}u - rv)\frac{A}{\sim} + ru\check{S} \right] - ru\check{S}\sqrt{1 + 2b\frac{A}{\sim}} = ru\check{S}h\left(\frac{A}{\sim}\right)(R_0 - 1)$$

Jelas F terdiferensiabel tingkat pertama pada $\left[0, \frac{A}{\sim}\right]$ sehingga F kontinu pada $\left[0, \frac{A}{\sim}\right]$, karena

$F(0) < 0$ dan $F\left(\frac{A}{\sim}\right) > 0$, maka menurut **Teorema Nilai Rata-Rata**, terdapat paling sedikit

satu $N^* \in \left[0, \frac{A}{\sim}\right]$ sedemikian hingga $F(N^*) = 0$.

Selanjutnya $N^* \in \left[0, \frac{A}{\sim}\right]$ adalah tunggal, dengan $\frac{dF(N)}{dN} > 0 \Leftrightarrow N > \frac{a(2rb-a)}{2b(a-rb)^2}$. Grafik F

turun pada saat $N < \frac{a(2rb-a)}{2b(a-rb)^2}$ dan naik pada saat $N > \frac{a(2rb-a)}{2b(a-rb)^2}$ untuk setiap

$N \in \left[0, \frac{a(2rb-a)}{2b(a-rb)^2}\right], F(N) \neq 0$. Akibatnya $N^* \in \left[\frac{a(2rb-a)}{2b(a-rb)^2}, \frac{A}{\sim}\right]$ dengan $F(N^*) = 0$ dan N^*

tersebut tunggal. Ketunggalan N^* dijamin oleh kemonotonan grafik F .

Teorema 3.3

i. Titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0, 0, 0, \frac{A}{\sim}\right)$ stabil asimtotik global

di $\Omega = \left\{(E, I, R, N) \in R_+^4 : 0 \leq E + I + R + N \leq N \leq \frac{A}{\sim}\right\}$ jika $R_0 \leq 1$ dan tidak stabil jika R_0

> 1 .

ii. Titik kesetimbangan endemik $P_1 = (E^*, I^*, R^*, N^*)$ dengan $E^* = \frac{u}{rv} \left(\frac{A}{\sim} - N^*\right)$,

$I^* = \frac{1}{r} \left(\frac{A}{\sim} - N^*\right), R^* = \frac{x}{r} \left(\frac{A}{\sim} - N^*\right)$, dan N^* adalah solusi dari persamaan

$(a-rb)\check{S}uN - \left[a(u\check{S}-vr)\frac{A}{\sim} + ru\check{S}\right] - ru\check{S}\sqrt{1+2bN} = 0$ stabil asimtotik lokal jika

$R_0 > 1$.

Bukti (i):

Diberikan fungsi $L = vE + \check{S}I$ (fungsi L terdefinisi di Ω , karena $\frac{dE}{d\ddagger}$ dan $\frac{dI}{d\ddagger}$ ada dan kontinu

di Ω maka $\frac{dL}{d\ddagger}$ ada dan kontinu di Ω , jadi $L \in C^1(\Omega)$.

Didefinisikan $\Omega_k = \{(E, I, R, N) \in \Omega : L(E, I, R, N) \leq k\}$ untuk suatu $k > 0$, dan

$$S = \left\{ (E, I, R, N) \in \Omega_k : \frac{dL(E, I, R, N)}{d\ddagger} = 0 \right\}$$

M= Himpunan invariant terbesar di dalam S.

Karena Ω terbatas maka Ω_k juga terbatas untuk suatu $k > 0$ akibatnya $\Omega = \Omega_k$.

$$\frac{dL}{d\ddagger} = \frac{d(vE + \check{S}I)}{d\ddagger} = v \frac{d(E)}{d\ddagger} + \check{S} \frac{d(I)}{d\ddagger} \text{ dan dari Persamaan (2.4) diperoleh}$$

$$\frac{dL}{d\ddagger} = \frac{av(N - E - I - R)I}{h(N)} - (1+v)vE + v\check{S}E - (1+x+r)\check{S}IE$$

$$= u \check{S} I \left[R_0 \frac{C(N)}{C\left(\frac{A}{\sim}\right)} - 1 \right].$$

Jadi $\frac{dL}{d\ddagger} \leq 0$ untuk setiap $(E, I, R, N) \in \Omega_k = \Omega$.

Jadi menurut Teorema Lasalle, untuk $\ddagger \rightarrow \infty$ setiap solusi dari Sistem (2.4) dengan syarat awal di Ω akan termuat di M. Karena $\frac{dL}{d\ddagger} = 0$, berlaku pada saat $I = 0$, maka M adalah himpunan dengan syarat $I = 0$. Akibatnya, diperoleh solusi sistem dengan $I = 0$ hanya P_0 . Jadi M tidak memuat solusi sistem selain P_0 .

Jadi berdasarkan akibat Teorema Lasalle, titik P_0 stabil global asimtotik jika $R_0 \leq 1$.

Selanjutnya untuk $R_0 > 1$, akan dibuktikan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil.

Matiks Jacobian sistem persamaan (2.4):

$$J(E, I, R, N) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dE} & \frac{df_1}{dI} & \frac{df_1}{dR} & \frac{df_1}{dN} \\ \frac{df_2}{dE} & \frac{df_2}{dI} & \frac{df_2}{dR} & \frac{df_2}{dN} \\ \frac{df_3}{dE} & \frac{df_3}{dI} & \frac{df_3}{dR} & \frac{df_3}{dN} \\ \frac{df_4}{dE} & \frac{df_4}{dI} & \frac{df_4}{dR} & \frac{df_4}{dN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-aI}{h(N)} - \check{S} & \frac{a(N - E - 2I - R)}{h(N)} & \frac{-aI}{h(N)} & \dots \\ v & -u & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & -r & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dengan } \dots = \frac{aI}{h(N)\sqrt{1+2bN}} + \frac{abI(E+I+R)}{h^2(N)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2bN}} \right).$$

Untuk P_0 , matriks Jacobiannya adalah:

$$J\left(0,0,0,\frac{A}{\sim}\right) = \begin{pmatrix} -\check{S} & \frac{aA}{\sim h\left(\frac{A}{\sim}\right)} & 0 & 0 \\ v & -u & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & -r & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Karena hanya ada satu nilai tak nol pada kolom ketiga dan keempat, dan keduanya bernilai negatif, maka dapat diperiksa apakah nilai-nilai eigen dari matriks $J\left(0,0,0,\frac{A}{\sim}\right)$ mempunyai bagian real negatif dan memeriksa matriks 2x2 yang merupakan blok dari matriks $J\left(0,0,0,\frac{A}{\sim}\right)$. Sehingga $\det(J_{01}) > 0$ ($R_0 < 1$).

Jadi titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 tidak stabil pada saat $R_0 < 1$.

Bukti (ii):

Untuk $R_0 > 1$, akan ditunjukkan titik kesetimbangan endemik P_1 stabil asimtotik lokal

Matriks Jacobian pada titik P_1 adalah:

$$J(E^*, I^*, R^*, N^*) = \begin{pmatrix} -\check{S} - \frac{aI^*}{h(N^*)} & \frac{a(N^* - E^* - 2I^* - R^*)}{h(N^*)} & \frac{-aI^*}{h(N^*)} & \dots \\ v & -u & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & -r & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\check{S} - \frac{aI^*}{h(N^*)} & \frac{\check{S}u}{h(N^*)} - \frac{aI^*}{h(N^*)} & \frac{-aI^*}{h(N^*)} & \dots \\ v & -u & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & -r & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dengan } \dots = \frac{aI^*}{h(N^*)\sqrt{1+2bN^*}} + \frac{abI^*(E^* + R^* + I^*)}{h^2(N^*)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2bN^*}}\right)$$

$$\leq \frac{aI^*}{h(N^*)} + \frac{2abI^*(E^* + R^* + I^*)}{h^2(N^*)} \leq \frac{aI^*}{h(N^*)} + \frac{2aI^*}{h(N^*)} \cdot \frac{bN^*}{h(N^*)} \leq \frac{3aI^*}{h(N^*)}.$$

Misalkan $J(E^*, I^*, R^*, N^*) = J^*$, $\det(\}I - J^*) = 0$, maka persamaan karakteristik $J(E^*, I^*, R^*, N^*)$ adalah:

$$\begin{vmatrix} \} + \check{S} + \frac{aI^*}{h(N^*)} & \frac{aI^*}{h(N^*)} - \frac{\check{S}u}{v} & \frac{aI^*}{h(N^*)} & - \dots^* \\ -v & \} + u & 0 & 0 \\ 0 & -x & \} + 1 & 0 \\ 0 & r & 0 & \} + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & r & 0 & \} + 1 \\ -v & \} + u & 0 & 0 \\ 0 & -x & \} + 1 & 0 \\ \} + \check{S} + \frac{aI^*}{h(N^*)} & \frac{aI^*}{h(N^*)} - \frac{\check{S}u}{v} & \frac{aI^*}{h(N^*)} & - \dots^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\} + 1)(\}^3 + a_1\}^2 + a_2\} + a_3) = 0$$

$$\text{dengan } a_1 = \left((u + \check{S}) + \left(1 + \frac{aI^*}{h(N^*)} \right) \right) > 0, \quad a_2 = \left((u + \check{S}) \left(1 + \frac{aI^*}{h(N^*)} \right) \right) > 0,$$

$$a_3 = r v \dots^* + \left(\frac{aI^*}{h(N^*)} \right) (v x + u + v).$$

Akibatnya $a_1 a_2 - a_3 \geq 0$.

Jadi menurut Kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik $P_1 = (E^*, I^*, R^*, N^*)$

$$E^* = \frac{u}{rv} \left(\frac{A}{\sim} - N^* \right), \quad I^* = \frac{1}{r} \left(\frac{A}{\sim} - N^* \right), \quad R^* = \frac{x}{r} \left(\frac{A}{\sim} - N^* \right), \quad \text{dan } N^* \text{ adalah solusi dari}$$

persamaan

$$(a - rb)\check{S}uN - \left[a(u\check{S} - vr) \frac{A}{\sim} + ru\check{S} \right] - ru\check{S}\sqrt{1 + 2bN} = 0 \text{ stabil asimtotik lokal jika } R_0 > 1.$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan hasil, disimpulkan bahwa parameter-parameter yang terdapat pada laju kontak jenuh berperan sebagai indikator penyebaran penyakit. Dalam tulisan ini laju kontak rate yang dikaji adalah $sC(N)\frac{S}{N}I$, dengan

$$C(N) = \frac{bN}{h(N)}, h(N) = 1 + bN + \sqrt{1 + 2bN},$$

untuk semua s, b adalah konstanta positif.

Saran

Secara umum, laju kontak dalam penyebaran penyakit pasti berbeda-beda. Oleh karena itu perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk laju kontak pada

Untuk $R_0 > 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi pada penyebaran penyakit dengan model SEIR adalah

$$I^* = \frac{1}{r} \left(\frac{A}{\sim} - N^* \right). \quad \text{Secara analisis}$$

matematis, tindakan preventif berfokus pada laju penularan penyakit diantara dua individu yang melakukan kontak per satuan waktu.

penyebaran penyakit-penyakit epidemik, misalnya penyebaran penyakit DBD, HIV, dan penyakit-penyakit epidemik lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. dan Rorres, C., 2004. *Aljabar elementer Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan, alih bahasa oleh Indriasari, R. dan Harmaen, I.*, Erlangga, Jakarta.
- Arrowsmith, D.K., Place, C.M., 1992. *Dynamical System: Differential Equation, Maps and Chaotic Behaviour*, Chapman and Hall, London.
- Bartle, R.G., and Shebert, D.R., 2010. *Introduction to Real Analysis, fourth Edition*. John Wiley & Sons, Inc.
- Chavez. C.C & Brauer Fred., 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Spinger-Verlag New York.
- Cheng Chi-Tsong., 1984. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston Holt-Saunders Japan.
- Diekmann, O and Heesterbeek, J.A.P., 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*. John Wiley, New York.

- Jordan, D.W., and Smith, P., 2002. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press.
- J.A.P. Heesterbeek, J.A.J. Metz., 1993. *The Saturating Contact Rate in Marriage and Epidemic Models*. *J.Math. Biology* 31.
- Khalil ,H.K., 1996. *Nonlinear System, Thrid Edition*, Printice Hall, USA.
- Kocak, H dan Hole,J.K,1991. *Dynamic and Bifurcation*, Springer-Verlag, New-York.
- Luenberger, G.D., 1979. *Introduction toDynamic Systems Theory, Models and Applications*, John Wilwy &Sons, New York.
- Olsder. G.J., 1994. *Mathematical System Theory*. Delfse Uitgevers Maatschappij, Netherlands.
- Perko Lawrence., 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. Springer-Verlag New York.
- Verhulst, F., 1990. *Nonlinear Differential Equation and Dyanimacal Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Wiggins, S., 1996. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, New York, Inc.
- Zhang, J., Ma, Z., 2003. *Global Dynamic of an SEIR epidemic model with saturating contact rate*. *Mathematical Boisciences*, Elsevier.