AUTOMORFISME GRAF LENGKAP DENGAN PENDEKATAN TEORI GRUP

Mulyono

Abstrak

Suatu graf (G) terdiri dari himpunan simpul (disimbolkan $V(G)$) dan himpunan jalur (disimbolkan $E(G)$) di mana $V(G) \neq \emptyset$. Menurut teorema isomorfisme graf, dua graf dikatakan isomorfik jika himpunan simpul pada graf pertama dipetakan secara bijektif kepada himpunan simpul graf kedua dan himpunan derajat masing-masing simpul pada graf pertama juga dipetakan secara bijektif kepada himpunan derajat masing-masing simpul pada graf kedua. Berdasarkan konsep ini, langkah awal yang paling mudah adalah dengan memetakan setiap simpul dengan derajat yang sama yang berada dalam himpunan $V(G)$ pula. Dalam aljabar abstrak, konsep pemetaan terhadap himpunan itu sendiri merupakan suatu automorfisme. Automorfisme graf lengkap K_n (dilambangkan $Aut(K_n)$) dengan n simpul menghasilkan permutasi sebanyak $n!$. Hasil ini diperoleh dengan proses pendekatan teori grup. Berdasarkan sifat-sifat yang dimiliki oleh $Aut(K_n)$, dapat disimpulkan bahwa $Aut(K_n)$ adalah grup simetri.

Kata Kunci: *Graf*, *Isomorfik*, *Automorfisme*, *Grup*

PENDAHULUAN

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V,\ E)$ yang dalam hal ini dinyatakan V sebagai himpunan simpul di mana $V(G) \neq \emptyset$ dan E sebagai himpunan jalur. Menurut teorema isomorfisme graf, dua graf dikatakan isomorfik jika himpunan simpul pada graf pertama dapat dipetakan secara bijektif kepada himpunan simpul graf kedua dan himpunan derajat masing-masing simpul pada graf pertama juga dapat dipetakan secara bijektif kepada himpunan derajat masing-masing simpul pada graf kedua.

Pemetaan yang bijektif merupakan pemetaan yang bersifat injektif (satu-satu) dan surjektif (pada). Berdasarkan konsep ini, langkah awal yang paling mudah untuk membangun himpunan yang graf yang isomorfis dengan graf itu sendiri adalah dengan memetakan setiap simpul dan derajat simpul graf itu terhadap dirinya sendiri. Dalam aljabar abstrak, konsep pemetaan terhadap himpunan itu sendiri merupakan konsep pemetaan isomorfis yang automorfis. Beranjak dari ide pemetaan terhadap himpunan itu sendiri, maka pemetaan itu pasti bersifat tertutup. Jika pemetaan itu bersifat tertutup, terdapat kemungkinan bahwa himpunan tersebut memiliki elemen identitas dan elemen invers. Jika hal tersebut terpenuhi, maka akan didapatkan sebuah grup dari automorfisme graf tersebut.

Dalam jurnal ini akan dibahas mengenai automorfisme dari suatu graf lengkap ke graf itu sendiri serta grup yang dibangun oleh automorfisme graf tersebut.

Mulyono adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

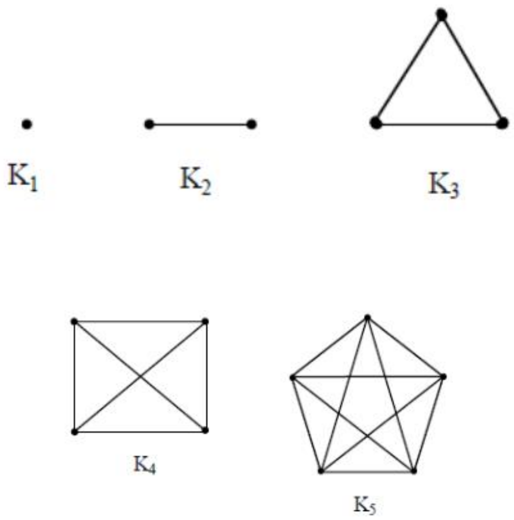
TINJAUAN PUSTAKA

Konsep Dasar

Definisi 2.1.1 Graf Lengkap

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai jalur ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n-1$. Jumlah jalur pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Contoh:



Gambar 2.1 *Graf lengkap K_1, K_2, K_3, K_4, K_5*

Definisi 2.1.2 Isomorfisme Graf

Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sehingga jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v pada G_1 maka sisi e' pada G_2 juga bersisian dengan simpul u' dan v' (Munir, 2003).

Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Selain menunjukkan korespondensi satu-satu di antara kedua himpunan simpul graf, dua buah graf dikatakan isomorfik jika memenuhi ketiga syarat berikut pula.

1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah jalur yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu (Munir, 2003).

Namun demikian, penelitian dalam jurnal ini bukan untuk membahas isomorfik tidaknya dua atau lebih graf. Penelitian ini lebih menitikberatkan kepada keisomorfikan graf khususnya graf lengkap K_n terhadap graf yang direkonstruksi dengan kaidah korespondensi satu-satu himpunan simpul-simpul dan himpunan jalur-jalur graf lengkap tersebut. Korespondensi satu-satu himpunan simpul dan himpunan jalur graf lengkap K_n pada dirinya sendiri analog dengan konsep operasi biner.

Definisi 2.1. 3. Operasi Biner

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $\circ$ pada elemen-elemen S disebut operasi biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $a \circ b \in S$ atau dikatakan bahwa operasi $\circ$ pada S bersifat tertutup (Sukirman, 2011).

Definisi 2.1.4 Grup

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner. Himpunan G bersama-sama dengan operasi biner $\circ$ atau ditulis $(G, \circ)$ adalah suatu grup bila memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Operasi $\circ$ pada G bersifat asosiatif
   $\forall\, a, b, c \in G,$
   $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. G memuat elemen identitas
   $\exists e \in G \ni \forall a \in G, a \circ e = e \circ a = a,$
3. Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.
   $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ (Sukirman, 2011)

Dengan kata lain grup merupakan sebuah himpunan dengan operasi yang bersifat asosiatif sedemikian sehingga terdapat elemen identitas, setiap elemennya memiliki invers, dan setiap anggotanya berasal dari pemasangan anggota yang tidak berada di luar dari himpunan. Kondisi ini yang dikatakan sebagai ketertutupan.

Definisi 2.1.5 Isomorfisme Grup

Sebuah isomorfisme ϕ dari grup G ke $\bar{G}$ adalah sebuah fungsi yang bersifat satu-satu dan pada yang mengawetkan operasi grup yaitu

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \forall a, b \in G$$

Grup G dan $\bar{G}$ kemudian dikatakan isomorf, dan diberi notasi $G \approx \bar{G}$ (Gallian, 1998).

Dalam keadaan tertentu terdapat isomorfisme yang khusus, yaitu automorfisme. Automorfisme adalah suatu isomorfisme dari grup G pada dirinya sendiri (Gallian, 1998).

Definisi 2.1.6 Automorfisme

Jika diberikan suatu grup $(G,\circ)$ dengan pemetaan $f: G \to G$, f dikatakan automorfisme jika $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$ untuk setiap $a, b \in G$ (Wikipedia, 2013).

Dalam kajian aljabar abstrak, automorfisme membentuk suatu grup yang spesifik, yaitu grup simetri.

Definisi 2.1.7 Grup Simetri

Diberikan S suatu himpunan berhingga dengan n elemen. S_n disebut sebagai grup permutasi jika S_n adalah himpunan semua permutasi elemen-elemen S sebanyak $n!$.

Automorfisme Suatu Graf dengan Pendekatan Teori Grup

Sebuah automorfisme dari sebuah graf merupakan isomorfisme graf tersebut kepada dirinya sendiri (Morris, 2000). Ketika semua hasil automorfisme graf tersebut dikumpulkan, akan terbentuk sebuah grup. Himpunan dari seluruh automorfisme sebuah graf X membentuk sebuah grup, yang disimbolkan $Aut(X)$ atau dibaca grup automorfisme X (Morris, 2000).

Graf Simetris sebagai Syarat untuk Membuat Automorfisme Grup Nontrivial

Automorfisme dari suatu graf menghasilkan graf lain yang simetris dengan graf tersebut (Bondy, 2008). Dengan demikian hal mendasar yang harus diperhatikan untuk membangun automorfisme dari suatu graf adalah kesimetrisan graf tersebut. Uraian berikut ini merupakan pendahuluan untuk menjelaskan definisi graf simetris.

Diberikan graf G dengan $V(G)$ sebagai himpunan simpul, $E(G)$ sebagai himpunan jalur, dan $Aut(G)$ sebagai himpunan hasil automorfismenya.

Definisi 2.3.1.a

G merupakan graf simpul transitif jika terdapat $v_1 . v_2 \in V(G)$ dan $\varphi \in Aut(G)$ sedemikian sehingga $\varphi(v_1) = v_2$.

Definisi 2.3.1.b

G merupakan graf jalur transitif jika terdapat $e_1 . e_2 \in E(G)$ dan $\sigma \in Aut(G)$ sedemikian sehingga $\sigma(e_1) = e_2$.

Definisi 2.3.2 Graf Simetri

G merupakan graf simetri jika G merupakan graf simpul transitif dan graf jalur transitif (Holton dan Sheehan, 1993).

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Grup Automorfisme dari Graf Lengkap K_1

Graf K_1 hanya terdiri dari satu simpul, yaitu simpul 1. Oleh karena itu himpunan simpul dari K_1 adalah $V_{K_1} = \{1\}$ dan himpunan jalur K_1 merupakan himpunan kosong (dinotasikan $E_{K_1} = \{\ \}$).

Gambar 3.1 Graf [illegible]

Sesuai konsep automorfisme, misalkan terdapat pemetaan φ, di mana φ memetakan $V_{K_1} \to V_{K_1}$. Karena K_1 hanya terdiri dari satu simpul yaitu simpul 1, automorfisme simpulnya pun hanya menghasilkan sebuah elemen, yaitu 1 itu sendiri.

$$\varphi(1) = 1$$

Hasil pemetaan φ tersebut dinamakan dengan α dan merupakan satu-satunya hasil automorfisme dari himpunan simpul K_1.

$$\alpha = (1)(1) = 1$$

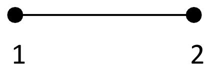
Dimisalkan G merupakan hasil automorfisme simpul graf K_1. Ini menyebabkan $G = \{\alpha\}$ dan G juga merupakan pemetaan identitas. G merupakan suatu himpunan tak kosong dan berlaku operasi $\circ$ yang merupakan permutasi dalam G. Dalam tabel Cayley, permutasi tersebut dapat didaftar sebagai berikut.

$\circ$	α
α	α

Tabel 3.1 Tabel Cayley Automorfisme K_1

Grup Automorfisme dari Graf Lengkap K_2

Graf K_2 terdiri dari dua simpul, yaitu simpul 1 dan 2. Oleh karena itu himpunan simpul dari K_2 adalah $V_{K_2} = \{1, 2\}$ dan himpunan jalur K_2 adalah $E_{K_2} = \{(1,2)\}$.



Gambar 3.2 Graf K_2

Sesuai konsep automorfisme, misalkan terdapat pemetaan φ, di mana φ memetakan $V_{K_2} \to V_{K_2}$. Hal tersebut dijelaskan sebagai berikut.

a. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2)$ (identitas)

b. $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)$

Dimisalkan G merupakan hasil automorfisme simpul graf K_2. Ini menyebabkan $G = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. G merupakan suatu himpunan tak kosong dan berlaku operasi $\circ$ yang merupakan permutasi dalam G.

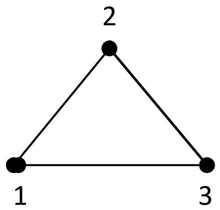
Dalam tabel Cayley, permutasi tersebut dapat didaftar sebagai berikut.

$\circ$	α_1	α_2
α_1	α_1	α_2
α_2	α_2	α_1

Tabel 3.2 Tabel Cayley Automorfisme K_2

Grup Automorfisme dari Graf Lengkap K_3

Graf K_3 terdiri dari tiga simpul, yaitu simpul $1, 2$ dan 3. Oleh karena itu himpunan simpul dari K_3 adalah $V_{K_3} = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan jalur K_3 adalah $E_{K_3} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$.



Gambar 3.3 Graf K_3

Sesuai konsep automorfisme, misalkan terdapat pemetaan φ, di mana φ memetakan $V_{K_3} \to V_{K_3}$. Didapatkan masing-masing hasil pemetaan sebagai berikut.

a. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)$ (identitas)

b. $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)\ (2\ 3)$

c. $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3)$

d. $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$

e. $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2)$

f. $\alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)(2)$

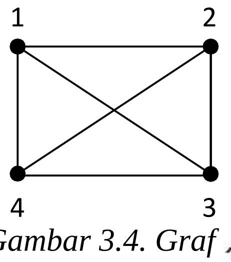
Dimisalkan G merupakan hasil automorfisme simpul graf K_3. Ini menyebabkan $G = \{\alpha_1,\ \alpha_2, \alpha_3,\ \alpha_4, \alpha_5,\ \alpha_6\}$. G merupakan suatu himpunan tak kosong dan berlaku operasi $\circ$ yang merupakan permutasi dalam G. Komposisi setiap elemen G disajikan dalam lampiran 1 dan hasil operasi tersebut disajikan dalam tabel Cayley sebagai berikut.

$\circ$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_2	α_2	α_1	α_5	α_6	α_3	α_4
α_3	α_3	α_4	α_1	α_2	α_6	α_5
α_4	α_4	α_3	α_6	α_5	α_1	α_2
α_5	α_5	α_6	α_2	α_1	α_4	α_3
α_6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Tabel 3.3 Tabel Cayley Automorfisme K_3

Grup Automorfisme dari Graf Lengkap K_4

Graf K_4 terdiri dari empat simpul, yaitu simpul 1, 2 ,3 dan 4. Oleh karena itu himpunan simpul dari K_4 adalah $V_{K_4} = \{1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan jalur K_4 adalah $E_{K_4} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.



Gambar 3.4. Graf K_4

Sesuai konsep automorfisme, misalkan terdapat pemetaan φ, di mana φ memetakan $V_{K_4} \to V_{K_4}$. Didapatkan masing-masing hasil pemetaan sebagai berikut.

a. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)$ (identitas)

b. $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3\ 4)$

c. $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2\ 3)(4)$

d. $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2\ 3\ 4)$

e. $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2\ \ 4\ \ 3)$

f. $\alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2\ 4)(3)$

g. $\alpha_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3)(4)$

h. $\alpha_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$

i. $\alpha_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4)$

j. $\alpha_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)$

k. $\alpha_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ \ 4\ 3)$

l. $\alpha_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ \ 4\ )(3)$

m. $\alpha_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)\ (4)$

n. $\alpha_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)\ (4)$

o. $\alpha_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)\ (2)\ (4)$

p. $\alpha_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4)\ (2)$

q. $\alpha_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)\ (2\ 4)$

r. $\alpha_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 4\ )$

s. $\alpha_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 2)$

t. $\alpha_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ \ 2)(3)$

u. $\alpha_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ )(2)$

v. $\alpha_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4\ )(2)(3)$

w. $\alpha_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2\ 3)$

x. $\alpha_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)$

Dimisalkan G merupakan hasil automorfisme simpul graf K_4 . Ini menyebabkan $G = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8,$

$\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}, \alpha_{17},$

$\alpha_{18}, \alpha_{19}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}\}$

Masing-masing hasil komposisi anggota G disajikan dalam tabel Cayley sebagai berikut.

∘	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{17}	α_{18}	α_{19}	α_{20}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
α_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{10}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{11}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{12}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{13}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{14}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{15}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{16}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{17}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{18}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{19}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{20}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{21}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{22}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{23}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	α_3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
α_{24}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	α_9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Tabel 3.4 Tabel Cayley Automorfisme K_4

Grup Automorfisme dari Graf Lengkap K_n

Graf lengkap K_n memiliki n buah simpul, yaitu $V(K_n) = 1, 2, 3, \ldots, n$. Setiap simpulnya terhubung dengan simpul-simpul lainnya dengan derajat simpul masing-masing adalah sama yaitu $(n-1)$. Diberikan pemetaan φ di mana φ memetakan anggota $V(K_n)$ kepada dirinya sendiri dan membentuk $G = Aut(K_n)$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $Aut(K_n)$ dengan operasi $\circ$ merupakan sebuah grup dengan mengikuti aksioma, yaitu sebagai berikut.

1. Operasi $\circ$ bersifat tertutup

   Diberikan pemetaan φ di mana φ memetakan anggota $V(K_n)$ kepada dirinya sendiri dan membentuk $G = Aut(K_n)$. Oleh karena itu φ merupakan pemetaan yang bijektif. Pemetaan ini menyebabkan operasi $\circ$ sebagai operasi antara elemen permutasinya juga bersifat tertutup.

2. Operasi $\circ$ bersifat asosiatif

   Diberikan α sebagai salah satu elemen permutasi $Aut(K_n)$ di mana $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}$.

   Pemetaan φ merupakan pemetaan yang isomorfik, sebab pemetaan ini memetakan dua himpunan yang sama yaitu G . Pemetaan yang isomorfik bersifat bijektif dan homomorfis. Pada poin pertama telah dijelaskan bahwa pemetaan φ merupakan pemetaan yang bijektif. Karena sifat homomorfis juga berlaku dalam pemetaan φ, maka berlaku fungsi:

   $$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

   Dengan demikian komposisi pemetaan bersifat asosiatif. Permutasi hasil pemetaan suatu himpunan kepada himpunan itu sendiri bersifat asosiatif jika komposisi pemetaannya bersifat asosiatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ untuk $\alpha, \beta, \gamma \in Aut(K_n)$.

3. Pemetaan identitas sebagai elemen identitas

   Pemetaan ini memiliki elemen identitas permutasi ε yang merupakan hasil pemetaan identitas, yaitu :

   $$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

4. Setiap $\alpha \in Aut(K_n)$ memiliki invers $\alpha^{-1} \in Aut(K_n)$

   Pemetaan bersifat tertutup. Komposisinya juga bersifat tertutup. Hal ini menyebabkan komposisi dua elemen $Aut(K_n)$ yang tertentu menghasilkan elemen identitas. Artinya kedua elemen tertentu tersebut merupakan dua elemen yang saling invers.

Terdapat n simpul yang akan dihitung jumlah permutasinya. Pemetaan φ

merupakan pemetaan yang bijektif. Masing-masing pemetaan itu dijelaskan sebagai berikut.

1. $\varphi(n) = n, n = 1, 2, 3, \dots, n$

   Pemetaan ini mengawetkan simpul itu sendiri. Oleh karena itu banyaknya $\varphi(n) = n$ adalah sebanyak n buah.

2. $\varphi(n) = n - 1, n = 2, 3, 4, \dots, n$

   Pemetaan ini mengawetkan simpul n kepada simpul $n - 1$. Oleh karena itu banyaknya $\varphi(n) = n - 1$ adalah sebanyak $n - 1$ buah.

3. $\varphi(n) = n - 2, n = 3, 4, 5, \dots, n$

   Pemetaan ini mengawetkan simpul n kepada simpul $n - 2$. Oleh karena itu banyaknya $\varphi(n) = n - 2$ adalah sebanyak $n - 2$ buah.

   ...

Pemetaan tersebut dilakukan seterusnya hingga hasilnya sebagai berikut.

4. $\varphi(n) = 3, n = (n - 2), (n - 1), n$

   Pemetaan ini mengawetkan simpul n kepada simpul 3. Oleh karena itu banyaknya $\varphi(n) = 3$ adalah sebanyak 3 buah.

5. $\varphi(n) = 2, n = (n - 1), n$

   Pemetaan ini mengawetkan simpul n kepada simpul 2. Oleh karena itu banyaknya $\varphi(n) = 2$ adalah sebanyak 2 buah.

6. $\varphi(n) = 1, n = n$

   Pemetaan ini mengawetkan simpul n kepada simpul 1. Oleh karena itu banyaknya $\varphi(n) = 1$ adalah sebanyak 1 buah.

Berdasarkan hal tersebut, banyaknya permutasi n simpul dihitung dengan kaidah perkalian yaitu sebagai berikut.

$$n\big(Aut(K_n)\big) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Dengan kata lain,

$$n\big(Aut(K_n)\big) = n!$$

Dengan n adalah banyaknya simpul.

Karena $G = Aut(K_n)$ memenuhi sifat-sifat grup dan memiliki $n!$ anggota maka dapat disimpulkan bahwa $G = Aut(K_n)$ merupakan grup simetri.

Jadi bentuk grup yang dibentuk oleh automorfisme simpul-simpul graf lengkap dengan n buah simpul adalah grup simetri dengan jumlah anggota sebanyak $n!$

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian yang telah dipaparkan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa automorfisme graf lengkap memenuhi sifat-sifat suatu grup. Grup yang dapat merepresentasikan himpunan semua graf yang isomorfis dengan suatu graf lengkap (K_n) adalah himpunan automorfisme graf tersebut. Grup automorfisme ini dinotasikan $Aut(K_n)$ dan merupakan grup simetris.

Setiap $Aut(K_n)$ membentuk himpunan yang memenuhi sifat-sifat grup dengan jumlah anggota yang sistematis yaitu $n!$, di mana n merupakan jumlah simpul graf K_n. Oleh karena itu automorfisme graf lengkap membentuk grup yang spesifik yaitu grup simetri.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.

Bondy, J.A. & U.S.R. Murty. 2008. *Graduate Text in Mathematics: Graph Theory*. New York: Springer-Verlag.

Damayanti, Reni Tri. 2011. *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan*. Jurnal Cauchy. 2: 36-40

Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag.

Erdös dan Rėnyi. *Asymmetric Graphs*. 20 November 2013. http://mabit. org.hu/ ~perdos/1963-04.pdf

Ferland, Kevin. 2009. *Discrete Math: An Introduction*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Gallian, Joseph. A. 1998. *Contemporary Abstract Algebra*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Godsil, Chris dan Gordon Royle. 2001. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer-Verlag.

Holton, D.A dan J. Sheehan. 1993. *The Petersen Graph*. New York: Cambridge University Press.

Jajcay, Robert. 2000. *The Structure of Automorphism Groups of Cayley Graphs and Maps*. Journal of Algebraic Combinatorics. 12: 73–84

Lipschutz, Seymor dan Marc Lars Lipson. 2002. *Seri Penyelesaian Soal Schaum: Matematika Diskrit 2*. Jakarta: Penerbit Salemba Teknika.

Morris, Joy. *Automorphism Groups of Circulant Graphs — a Survey*. 25 Juli 2013. http:// ww.cs.uleth.ca/~morris/Research/ AutSurvey.pdf

Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika Bandung.

Sukirman. 2011. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Penerbit Universitas Terbuka.

Tabar, Fath. 2007. *The Automorphism Group of Finite Graphs. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics.* 2: 29-33

Wikipedia. *Graph of Group*. 27 September 2013. http://en.wikipedia.org/wiki/ Graph_of_groups

Wikipedia. *Kaliningrad*. 27 September 2013. http://en.wikipedia.org/wiki/ Kaliningrad

Wikipedia. *Konigsberg*. 27 September 2013. https://en.wikipedia.org/wiki/ K%C3%B6nigsberg

Wikipedia. *Group Isomorphism*. 4 Desember 2013. https://en.wikipedia.org/wiki/ Group_isomorphism