KONVERGENSI DAN STABILITAS SOLUSI PERSAMAAN LAPLACE PADA BATAS DIRICHLET

Lasker P. Sinaga

Abstract

Persamaan laplace adalah salah satu bentuk persamaan differensial tipe eliptik yang dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel. Metode pemisahan variabel membuat persamaan laplace menjadi dua persamaan differensial linear homogen orde dua yang memenuhi batas dirichlet pada persegi (rectangular). Solusi persamaan laplace adalah sebuah barisan yang konvergen dan stabil asimtot terhadap bidang keseimbangannya.
Kata kunci : *Laplace*, *Dirichlet*, *Konvergensi*, *Stabilitas*

PENDAHULUAN

Kestabilan (stability) dan keseimbangan (equilibrium) diperkenalkan oleh matematikawan Rusia, A. M. Lyapunov. Jika solusi-solusi dari sebuah persamaan berada dekat dan selalu dekat terhadap solusi lainnya maka kondisi tersebut dikatakan stabil, sebaliknya disebut dengan tidak stabil.

Andaikan persamaan $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ dengan kondisi awal $y(0) = y_0$ mempunyai solusi $y = y(t, y_0)$ dimana y adalah fungsi kontinu pada interval tertutup $[0, T]$ maka untuk $\varepsilon > 0$ terdapat $|\Delta y_0|$ yang sangat kecil sehingga kurva $y = y(t, y_0 + \Delta y_0)$ dimuat dalam sebuah bidang dengan lebar 2ε disekitar solusi tersebut.

Permasalahan yang cukup menarik adalah bagaimana cara mengekspresikan penganalisisan konvergensi dan kestabilan dari solusi persamaan laplace pada batas dirichlet dengan bentuk:

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 .$$

$$u(x, y) = f(x, y) \qquad \text{pada } 0 < x \le a ,\ y = 0$$

$$u(x, y) = 0 \qquad \text{pada sisi lainnya}$$

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dengan berbagai dukungan definisi dan teorema.

PEMBAHASAN DAN HASIL

Solusi Persamaan Laplace

Persamaan laplace diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Andaikan $u(x,y)$ sebagai solusi dari persamaan laplace dan memisahnya atas perkalian dua fungsi dengan variabel bebas berbeda $u(x,y) = X(x)Y(y)$ sehingga:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

Persamaan laplace akan menjadi:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

Misalkan $-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$, sedemikian diperoleh dua persamaan differensial homogen orde dua, $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ dan $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$.

Kedua persamaan differensial biasa tersebut akan diselesaikan dengan memperhatikan problema nilai eigen λ agar diperoleh solusi nontrivial serta memenuhi kondisi batas yang ditentukan. Yang dapat dilakukan adalah menunjukkan semua kemungkinan nilai λ.

Kasus 1. $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ dengan $X(0) = X(a) = 0$

1. Pada $\lambda = 0$ diperoleh solusi trivial sehingga $\lambda = 0$ bukan nilai eigen dari masalah diatas.
2. Pada $\lambda < 0$ diperoleh solusi trivial sehingga $\lambda < 0$ bukan nilai eigen dari masalah diatas.

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

3. Pada $\lambda > 0$ dengan $\lambda = p^2$, $p > 0$ maka $X''(x) + p^2 X(x) = 0$ sehingga diperoleh solusi $X(x) = \alpha_1 \cos px + \beta_1 \sin px$ dengan $X(0) = \alpha_1 = 0$

   dan $X(a) = \beta_1 \sin ap = 0$. Untuk $\beta_1 \neq 0$ maka $ap = n\pi$ atau $p = \dfrac{n\pi}{a}$ sehingga $p^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$ untuk $n \in N$.

   Dengan demikian, diperoleh barisan solusi $X_n(x) = \beta_1 \sin \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} x$ untuk $n \in N$.

Kasus 2. $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$ dengan $Y(0) = Y(b) = 0$

Karena pada kasus 1 telah diperoleh nilai eigen $\lambda = p^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$, $n \in N$ maka kasus 2 dapat diselesaikan menjadi

$$Y_n(y) = \alpha_2 \cosh \frac{n\pi}{a} y + \beta_2 \sinh \frac{n\pi}{a} y$$

dengan

$$Y_n(b) = \alpha_2 \cosh \frac{n\pi}{a} b + \beta_2 \sinh \frac{n\pi}{a} b = 0$$

sehingga $\beta_2 = -\alpha_2 \left(\dfrac{\cosh \frac{n\pi}{a} b}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \right)$

dengan demikian

$$Y_n(y) = \left(\frac{\alpha_2}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \right) \sinh \frac{n\pi}{a} (b - y).$$

Solusi persamaan menjadi

$$u(x,y) = X_n(x) Y_n(y) = k \sin \frac{n\pi}{a} x \left(\frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \right)$$

dengan $k = \alpha_2 \beta_1$. Jadi, diperoleh solusi yang sangat banyak tetapi belum memenuhi kondisi batas. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan prinsip superposisi.

$$u(x,y) = \sum k \sin \frac{n\pi}{a} x \left(\frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \right)$$

Dengan problema dirichlet, maka:

$$u(x,0) = \sum k \sin \frac{n\pi}{a} x \left(\frac{\sinh \frac{n\pi}{a} b}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \right) =$$

$$\sum k \sin \frac{n\pi}{a} x = f(x)$$

Misalkan $f_n(x) = k \sin \dfrac{n\pi}{a} x$ maka $k = \dfrac{2}{a} \displaystyle\int_0^a f_n(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx$. Dengan demikian

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

$$u_n(x,y) = k\sin\frac{n\pi}{a}x\left(\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\right) = k\sin nx\sqrt{\lambda}e^{-ny\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1-e^{-2n(b-y)\sqrt{\lambda}}}{1-e^{-2nb\sqrt{\lambda}}}\right) =$$

$$k\sin nx\sqrt{\lambda}\left(\frac{\sinh n(b-y)\sqrt{\lambda}}{\sinh nb\sqrt{\lambda}}\right)$$

Konvergensi dan Stabilitas Solusi Persamaan Laplace

Dengan memisalkan $v_n = k\dfrac{e^{-n\sqrt{\lambda}y}}{1-e^{-2n\sqrt{\lambda}b}}$, $k > 0$ dan $-1 \le \sin n\sqrt{\lambda}x \le 1$ maka $-v_n \le u(x,y) \le v_n$ atau $0 \le |u_n(x,y)| \le v_n$. Analisis berikutnya adalah menunjukkan kekonvergenan barisan tersebut dengan menunjukkan kekonvergenan $v_n(x,y)$ terlebih dahulu.

Misalkan $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} = ke^{-ny\sqrt{\lambda}}$ dan $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} = 1-e^{-2nb\sqrt{\lambda}}$ sehingga $v_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

Kekonvergenan $v_n(x,y)$ akan ditunjukkan dengan menunjukkan kekonvergenan dari $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ berdasarkan definisi berikut.

Definisi 3.1 Sebuah barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke limit *x* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat *N*, $n \ge N$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$.

Contoh 3.2 Jika $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} ke^{-ny\sqrt{\lambda}} = 0$ maka $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 0.

Bukti:

Pilih untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian $\left|ke^{-ny\sqrt{\lambda}} - 0\right| = \left|ke^{-ny\sqrt{\lambda}}\right| < \varepsilon$

Karena $n \in N$, $n \ge n_0$ sehingga

$$ke^{-ny\sqrt{\lambda}} = \frac{k}{e^{ny\sqrt{\lambda}}} < \varepsilon.$$

Dan $e^{ny\sqrt{\lambda}} > \dfrac{k}{\varepsilon} \Leftrightarrow ny\sqrt{\lambda} > \ln\left|\dfrac{k}{\varepsilon}\right|$ atau

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{y\sqrt{\lambda}}\ln\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|$$

Pilih $\varepsilon = K$ sedemikian $n > 0$. Ambil $n = 1$ sehingga $\left|\dfrac{k}{e^{y\sqrt{\lambda}}}\right| < k$

Dengan demikian $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} = Ke^{-ny\sqrt{\lambda}}$ konvergen ke 0.

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Contoh 3.3 Jika

$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-2nb\sqrt{\lambda}}) = 1$ maka

$\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 1.

Bukti:

Pilih untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian

$\left|(1-e^{-2nb\sqrt{\lambda}})-1\right| = \left|-e^{-2nb\sqrt{\lambda}}\right| = \left|e^{-2nb\sqrt{\lambda}}\right| < \varepsilon$

Karena $n \in N$, $n \geq n_0$ sehingga

$e^{-2nb\sqrt{\lambda}} = \dfrac{1}{e^{2nb\sqrt{\lambda}}} < \varepsilon$.

Dan $e^{2nb\sqrt{\lambda}} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2nb\sqrt{\lambda} > \ln\left|\dfrac{1}{\varepsilon}\right|$ atau

$\Leftrightarrow n > \dfrac{1}{2b\sqrt{\lambda}} \ln\left|\dfrac{1}{\varepsilon}\right|$

Pilih $\varepsilon = 1$ sedemikian $n > 0$. Ambil $n = 1$ sehingga $\left|e^{-2b\sqrt{\lambda}}\right| = \left|\dfrac{1}{e^{2b\sqrt{\lambda}}}\right| < 1$

Dengan demikian $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} = 1 - e^{-2nb\sqrt{\lambda}}$ konvergen ke 1.

Teorema 3.4 Jika $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke *P* dan $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke *Q*, dengan $Q \neq 0$ dan $Q_n \neq 0$ untuk setiap *n*, maka $\left\{\dfrac{P_n}{Q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\dfrac{P}{Q}$.

Bukti:

Pilih $\varepsilon > 0$, terdapat sebuah bilangan positif bilangan Riel *M* dan sebuah bilangan bulat positif N_1, sedemikian $|Q_n| \geq M$ untuk setiap $n \geq N_1$. Kemudian

$$\varepsilon' = \frac{M\varepsilon}{1+\left|\dfrac{P}{Q}\right|} > 0$$

Terdapat sebuah bilangan positif N_2 sehingga, untuk $n \geq N_2$, $|P_n - P| \leq \varepsilon'$ dan sebuah bilangan bulat positif $n \geq N_3$, sehingga $|Q_n - Q| \leq \varepsilon'$. Misalkan $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Untuk $n \geq N$, $|Q_n - Q| \leq \varepsilon'$, $|P_n - P| \leq \varepsilon'$ dan $|Q_n| \geq M$.

Jadi $\left|\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P}{Q}\right| = \left|\dfrac{P_nQ - Q_nP}{Q_nQ}\right| = \left|\dfrac{P_nQ - PQ + PQ - Q_nP}{Q_nQ}\right| \leq \left|\dfrac{P_n - P}{Q_n}\right| + \dfrac{|P||Q_n - Q|}{|Q_n||Q|}$

$$< \varepsilon'\left(\frac{1}{|Q_n|} + \frac{|P|}{|Q_n||Q|}\right)$$

$$\leq \varepsilon' \frac{1}{M}\left(1 + \frac{|P|}{|Q|}\right) = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Dengan demikian $v_n = \frac{P_n}{Q_n}$ konvergen ke 0.

Teorema 3.5 (The Ratio Test) Misalkan bahwa $v_n > 0$ untuk $n \geq k$ maka

a. $\sum v_n < \infty$ jika $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$

b. $\sum v_n = \infty$ jika $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$

Bukti:

a. Jika $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, terdapat bilangan r sehingga $0 < r < 1$ dan $\frac{v_{n+1}}{v_n} < r$ untuk n yang semakin besar. Pernyataan ini dapat dituliskan sebagai $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{r^{n+1}}{r^n}$.

   Karena $\sum r^n < \infty$ maka $\sum v_n < \infty$

b. Jika $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ terdapat bilangan r sehingga $r > 1$ dan $\frac{v_{n+1}}{v_n} > r$ untuk n yang semakin besar. Pernyataan ini dapat dituliskan sebagai $\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{r^{n+1}}{r^n}$.

   Karena $\sum r^n = \infty$ maka $\sum v_n = \infty$ ■

Berdasarkan tes rasio diatas, kekonvergenan dari $\sum v_n = \sum k \frac{e^{-n\sqrt{\lambda}y}}{1-e^{-2n\sqrt{\lambda}b}}$ ditunjukkan dengan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{ke^{-(n+1)\sqrt{\lambda}y}}{1-e^{-2(n+1)\sqrt{\lambda}b}}\right)\left(\frac{1-e^{-2n\sqrt{\lambda}b}}{ke^{-n\sqrt{\lambda}y}}\right)$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} e^{-\sqrt{\lambda}y} \left(\frac{1-e^{-2n\sqrt{\lambda}b}}{1-e^{-2(n+1)\sqrt{\lambda}b}}\right)$$

$$= e^{-\sqrt{\lambda}y}$$

Untuk $\sqrt{\lambda} > 0$ dan y > 0 maka $0 < e^{-\sqrt{\lambda}y} < 1$ sehingga $\sum v_n$ adalah konvergen.

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Teorema 3.6 (The Comparison Test) Misalkan bahwa untuk setiap $n \in N$, $0 \le u_n \le v_n$ dan jika $\sum v_n$ konvergen maka $\sum u_n$ juga konvergen.

Bukti:

Misalkan $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ dan $t_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$, kemudian karena $\sum v_n$ konvergen, (t_n) adalah terbatas. Misalkan $t_n \le t$, untuk setiap $n \in N$, $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \le v_1 + v_2 + ... + v_n = t_n \le t$ sehingga s_n juga terbatas. Karena (s_n) adalah barisan yang naik (increasing, $u_n \ge 0$), (s_n) menuju titik limit pada $n \to \infty$, dan $\sum u_n$ konvergen. ■

Karena $0 \le |u_n(x,y)| \le v_n(x,y)$ dan comparison test maka $\sum |u_n|$ adalah konvergen.

Teorema 3.7 Misalkan $\sum u_n$ adalah sebuah barisan bilangan riel. Jika $\sum |u_n|$ konvergen maka $\sum u_n$ juga konvergen.

Bukti:

Misalkan $a_n = \begin{cases} u_n & jika \quad u_n \ge 0 \\ 0 & jika \quad u_n < 0 \end{cases}$ dan $b_n = \begin{cases} 0 & jika \quad u_n \ge 0 \\ -u_n & jika \quad u_n < 0 \end{cases}$

Kemudian untuk setiap $n \in N$, $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$ dan $u_n = a_n - b_n$. Dengan demikian $0 \le a_n \le |u_n|$ dan $0 \le b_n \le |u_n|$. Jadi, jika $\sum |u_n|$ adalah konvergen maka berdasarkan comparison test membuktikan bahwa $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ adalah konvergen, sehingga $\sum (a_n - b_n)$ juga konvergen. ■

Solusi $u(x,y) = \sum u_n(x,y)$ dengan $0 \le |u_n(x,y)| \le v_n(x,y)$ telah terbukti konvergen dan $\tilde{u}(x_0, y) = 0$ adalah bidang keseimbangan. Yang menjadi pertanyaan adalah *apakah solusi nol* $\tilde{u}(x_0, y) = 0$ *adalah stabil?*

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Definisi 3.8 Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon)$ sehingga $|\Delta x_0| < \delta(\varepsilon)$, $|u(x_0 + \Delta x_0, y) - \tilde{u}(x_0, y)| < \varepsilon$ untuk setiap $y > 0$ maka $\tilde{u}(x_0, y)$ disebut stabil.

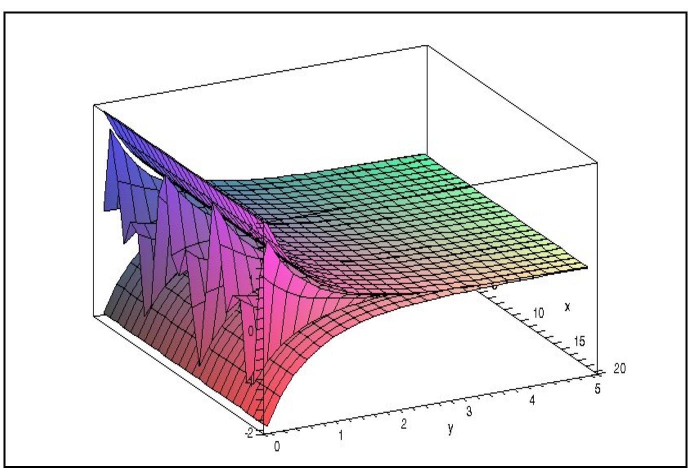
Misalkan $|\Delta x_0| < \delta(\varepsilon)$ dan berdasarkan teorema 3.4 diatas maka $\left| ke^{-ny\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1 - e^{-2n(b-y)\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2nb\sqrt{\lambda}}} \right) \right| < \varepsilon$ sehingga:

$$
\begin{aligned}
|u(x_0 + \Delta x_0, y) - \tilde{u}(x_0, y)| &= \sum k \sin n(x_0 + \Delta x_0)\sqrt{\lambda} e^{-ny\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1 - e^{-2n(b-y)\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2nb\sqrt{\lambda}}} \right) \\
&< ke^{-ny\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1 - e^{-2n(b-y)\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2nb\sqrt{\lambda}}} \right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Definisi 3.9 Penyelesaian $\tilde{u}(x_0, y)$ disebut stabil asimtot, jika stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga $|\Delta x_0| < \delta_0$ dan $\lim_{y \to \infty} (u(x_0 + \Delta x_0, y) - \tilde{u}(x_0, y)) = 0$

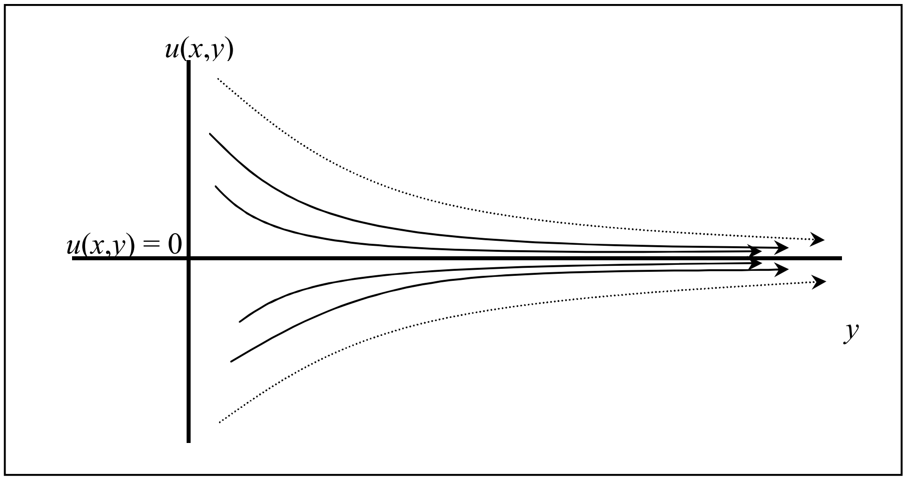
Dengan definisi tersebut, $\lim_{y \to \infty} \left(\sum k \sin nx \sqrt{\lambda} e^{-ny\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1 - e^{-2n(b-y)\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2nb\sqrt{\lambda}}} \right) - 0 \right) = 0$.

Dengan demikian, solusi persamaan laplace yang diperoleh adalah barisan solusi yang konvergen dan stabil asimtotik terhadap bidang keseimbangan seperti ilustrasi pada gambar berikut.



Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Gambar 3.10 Kurva solusi $u(x,y)=\sum k\sin n(x_0+\Delta x_0)\sqrt{\lambda}e^{-ny\sqrt{\lambda}}\left(\dfrac{1-e^{-2n(b-y)\sqrt{\lambda}}}{1-e^{-2nb\sqrt{\lambda}}}\right)$



Gambar 3.11 Sudut pandang dimensi dua kestabilan solusi persamaan laplace

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penelitian tersebut, dapat diambil kesimpulan bahwa solusi persamaan laplace pada batas dirichlet dapat diperoleh dengan metode pemisahan variabel dengan nilai eigen positif. Solusi yang diperoleh adalah barisan solusi yang konvergen dan solusi nol adalah bidang keseimbangannya. Solusi tersebut stabil asimtotik terhadap bidang keseimbangan.

Persamaan laplace adalah salah satu bentuk persamaan differensial elliptik. Penelitian ini dapat dilanjutkan ke bentuk persamaan-persamaan elliptik lainnya atau ke tipe persamaan parabolik ataupun hiperbolik.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle R. G., 1976, The Element of Real Analysis, Jhon Wiley & Sons Inc. Canada.

Brown A. L. dan Page A., 1970, Element of Functional Analysis, Van Nostrand Reinhold Company, London.

Farlow S. J., 1982, Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Jhon Wiley & Sons Inc, Canada.

Gaughan D. E., 1987, Introduction to Analysis, Wadsworth Inc, Belmont, California, USA.

Gustafson K. E., 1987, Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods, Jhon Wiley & Sons Inc. Canada.

John F., 1978, Partial Differential Equations, Springer-Verlag New

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

York Inc, New York, USA.

Seydel R., 1994, Practical Bifurcation and Stability Analysis, -Verlag New York Inc, New York, USA.

Tikhonov N., Vasil'eva A. B., dan Sveshnikov A. B., 1985, Differential Equations, -Verlag New York Inc, New York, USA.

Lasker P. Sinaga adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Penngetahuan Alam, Universitas Negeri Medan