APPLICATION OF VASICEK'S RATE INTEREST MODEL IN TERM INSURANCE PREMIUMS CALCULATION

Abstract

Sudianto Manullang

Factor of interest rate and mortality is former principal components to get premium of term insurance. Vasicek's rate of interest model is one of stochastic rate of interest model that is utilized on derivatif that becomes discount factor of zero coupon bond's price, and solved by Affine's model to get annuity, actuarial value so results annual net premium of term insurance.
Key Word : *Vasicek's rate of interest model*

PENDAHULUAN

Hukum pasar dari industri asuransi adalah menciptakan premi dan benefit yang seoptimal mungkin. Jika premi yang ditawarkan terlalu mahal maka kemungkinan besar produk tersebut tidak akan laku dijual sedangkan apabila premi terlalu murah maka perusahaan akan mendapatkan resiko yang besar dan profit yang kecil pula.

Pada dasarnya premi asuransi jiwa dipengaruhi oleh tiga faktor yaitu: peluang seseorang usia tertentu akan meninggal dalam jangka waktu tertentu (mortalitas), suku bunga yaitu tingkat suku bunga yang diperoleh oleh dana yang diinvestasikan, dan biaya untuk memasarkan polis dan biaya administrasi lainnya untuk pengelolaan polis tersebut.

Unsur stokastik dalam penentuan besaran aktuaria pada suku bunga stokastik dapat dilakukan dengan menggunakan model tingkat suku bunga derivatif yang ada dalam dunia pasar modal. Model yang paling popular dalam struktur waktu suku bunga (*term structure of interest rate*) adalah model kesetimbangan karena memuat unsur deterministik dan stokastik didalamnya. Salah satu model yang berkembang tersebut adalah model Vasicek (1977), model ini merupakan pengembangan dari model Orstein-Uhlenbeck (1931). Salah satu instrumen pasar yakni obligasi yang menggunakan tingkat

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

bunga derivatif sering diaplikasikan dalam perhitungan aktuaria pada asuransi jiwa. Bentuk obligasi tanpa bunga (*zero coupon bond*) yang memuat faktor diskon pada nilai premi dapat dirumuskan dengan menggunakan model ini, yang pada akhirnya juga dapat menggambarkan perubahan-perubahan tingkat suku bunga dari perhitungan aktuaria.

TEORI DASAR

Proses Stokastik

Defenisi 2.1 Suatu proses stokastik dengan waktu kontinu $\{X(t), t \in T\}$ disebut memiliki inkremen independen (*independent increment*) jika semua $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, variabel random $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$,....., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ adalah saling independen.

Gerak Brown

Defenisi 2.2 (Ross, 1996) Gerak brown sering juga disebut sebagai proses Wiener. Suatu proses stokastik $\{W_t : t \geq 0\}$ disebut gerak Brown jika proses tersebut memenuhi beberapa kriteria berikut ini :

i) $W_0 = 0$ dan W_t adalah kontinu saat $t \geq 0$
ii) $W_t \sim N(0,t)$ yang berarti W_t berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi *t*.
iii) $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ dan akan independen selama proses sampai waktu ke-*s*

Asuransi Jiwa Berjangka

Diberikan b_t adalah fungsi manfaat (*benefit*) asuransi dan v_t menunjukkan fungsi diskonto. Nilai waktu sekarang (*present value*) dari pembayaran manfaat pada saat dikeluarkannya polis dinotasikan dengan z_t

$$z_t = b_t v_t \qquad (1)$$

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Untuk asuransi jiwa berjangka *n* tahun yang memberikan manfaat sebesar 1 satuan pada saat kematian dipunyai :

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t \ge 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Premi tunggal bersih (*actuarial present value*) untuk asuransi ini dengan menggunakan *equivalence premium principle* diberikan sebagai,

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left[Z\right] = \int_0^n v^t \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} dx \qquad (2)$$

Dalam hal ini $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ menotasikan premi tunggal bersih asuransi jiwa berjangka *n* tahun dengan ${}_t p_x$ menunjukkan probabilitas seseorang yang sekarang berusia *x* tahun akan hidup sampai *t* tahun ke depan

Anuitas Hidup

Anuitas hidup merupakan serangkaian pembayaran dikaitkan dengan mati hidupnya sesorang secara terus-menerus atau pada selang waktu yang sama, seperti bulan, triwulan, atau tahunan, selama seseorang yang menjadi tertanggung masih hidup. Dengan kata lain Anuitas hidup merupakan anuitas yang pembayarannya dikaitkan dengan mati hidupnya sesorang. Interval pembayaran dapat dilakukan pada awal (*annuities-due*), atau anuitas akhir (*annuities-ammediate*) yang dapat dilakukan pada akhir waktu pembayaran.

Nilai anuitas hidup berjangka waktu *n* tahun dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_t p_x \, dt \qquad (3)$$

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Premi

Premi dalam asuransi jiwa berjangka dibayarkan secara berkala selama jangka waktu kontraknya, yang biasanya dibayarkan pada awal periode. Semakin panjang rentang jangka waktu pembayaran premi maka harga premi yang dibayarkan akan semakin kecil.

Perhitungan premi secara berkala dengan periode pembayaran n tahun serta memberikan manfaat sebesar 1 satuan pada saat tahun kematian adalah :

$$P\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \qquad (4)$$

dengan $\overline{a}_{x:\overline{n}|}$ adalah nilai tunai anuitas awal dan $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ adalah asuransi atau nilai santunan.

Penentuan Premi Bersih Asuransi Jiwa Berjangka

Persamaan model Vasicek

Model Vacisek diperkenalkan pertama kali tahun 1977 oleh Oldrich Vasicek (Vasicek, 1977). Model ini merupakan salah satu model matematika yang menjelaskan evolusi tingkat bunga. Model Vacisek termasuk dalam persamaan diferensial stokastik yang mampu menggambarkan fluktuasi pergerakan *short-rate* (tingkat suku bunga sesaat) dari *yield* obligasi selama masa obligasi. Selain dapat memodelkan fluktuasi tingkat suku bunga, model Vacisek juga dapat digunakan untuk memprediksi besarnya tingkat bunga pada periode kedepan.

Model Vasicek berbentuk sebagai berikut :

$$dr_t = \kappa\left(\theta - r_t\right)dt + \sigma dW_t, \qquad \kappa > 0 \qquad (5)$$

Dengan :

κ = kecepatan suku bunga menuju nilai *long-run*

θ = nilai normal long run dari suku bunga

r_t = tingkat suku bunga

σ = volatilitas tingkat suku bunga

W_t = gerak Brown / proses Wiener

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Dalam model ini ditunjukkan adanya *mean reversion* yaitu suatu kecenderungan nilai r_t berada disekitar rata-rata *long run* atau dapat dikatakan bahwa tingkat suku bunga bergerak dalam range terbatas. Sebagai ilustrasi jika tingkat bunga berada diatas rata-rata long run $r > \theta$ maka faktor *drift* akan bernilai negatif sehingga suku bunga akan ditekan sampai pada nilai rata-rata θ. Jika $r < \theta$ maka faktor *drift* akan bernilai positif sehingga bunga juga harus ditekan karena faktor *drift* bernilai positif akan menaikkan suku bunga. Naiknya suku bunga pada akhirnya akan menghambat percepatan pertumbuhan ekonomi. Dengan menggunakan proses Ornstein-Unhlenbeck solusi persamaan (5)

$$r_t - \theta = \left(r_0 - \theta \right) e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW_s$$

menjadi :

$$r_t = r_0 e^{-\kappa t} + \theta \left(1 - e^{-\kappa t}\right) + \sigma e^{-\kappa s} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s \qquad (6)$$

ZCB (*Zero Coupon Bond*)/ Obligasi berkupon nol

Yield dari ZCB, yaitu hasil yang akan diperoleh investor apabila menempatkan dananya untuk dibelikan obligasi, sepenuhnya sama dengan suku bunga. Misalkan r_t mewakili suku bunga pada waktu yang bersifat kontinu diperoleh nilai ZCB sebesar :

$$P\left(t,T\right) = e^{-r_t \left(T-t\right)} \qquad (7)$$

dan diperoleh yield

$$R\left(t,T\right) = -\frac{\log P^*\left(t,T\right)}{T-t} \qquad (8)$$

Solusi untuk masalah harga ZCB pada dapat ditentukan dengan menggunakan model Affine. Diasumsikan drift dan volatilitas spot rate pada model *mean reversion* masing-masing berbentuk

$$\delta\left(r_t,t\right) = \alpha_1\left(t\right) + \alpha_2\left(t\right) r_t \text{ dan } \sigma\left(r_t,t\right)^2 = \beta_1\left(t\right) + \beta_2\left(t\right) r_t \qquad (9)$$

untuk $\alpha_i\left(t\right)$ dan $\beta_i\left(t\right)$, $i = 1, 2,$ adalah fungsi deterministik dalam t.

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Sebuah ZCB berjangka waktu T dengan harga pada waktu t adalah $P(t,T,r) = P(\tau,r)$, misalkan penentuan harga mengikuti formula

$$P(\tau,r) = \exp\left[A(\tau) - B(\tau)r_t\right] \tag{10}$$

Solusi untuk $A(\tau)$ dan $B(\tau)$ untuk penentuan nilai ZCB dapat dicari dengan mereduksi unsur r_t sehingga diperoleh persamaan diferensial simultan

$$B'(\tau)\frac{1}{2}\beta_2(t)r_tB^2(\tau) - \alpha_2(t)r_tB(\tau) - 1 = 0 \tag{11}$$

$$-A'(\tau) + \frac{1}{2}\beta_1(t)B^2(\tau) - \alpha_1(t)B(\tau) = 0 \tag{12}$$

dengan :

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \tag{13}$$

$$A(\tau) = \bar{r}\left[\tau - B(\tau)\right] + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left[\tau - B(\tau) - \frac{1}{2\kappa}\left(B(\tau)\right)^2\right]$$

$$= \left(\bar{r} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)\left[\tau - B(\tau)\right] - \frac{1}{4\kappa}\left(B(\tau)\right)^2 \tag{14}$$

Premi tahunan untuk asuransi jiwa dengan 1 unit pembayaran pada saat kematian (x) berdasarkan model suku bunga Vasicek dinyatakan dengan $A^1_{x:\overline{n}|}$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E\left(E\left(v(t)\right)\right) \tag{15}$$

$$= \int_0^n E\left(v(t)\right) f_{TX}(t)\,dt$$

$$= \int_0^n P(\tau, r_t) f_{TX}(t)\,dt$$

$$= \int_0^n \exp\left[A(\tau) - B(\tau)r_t\right] f_{TX}(t)\,dt$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \exp\left(\tau\left(\bar{r} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) - B(\tau)\left(r_t + \bar{r} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)\frac{\sigma^2}{4\kappa}\left(B(\tau)\right)^2\right)\mu_{x+t}\left(\exp - \int_0^n \mu_{x+s}\,ds\right)dt$$

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

dan untuk anuitas hidup kontinu pembayaran 1 unit setiap periode berdasarkan model suku bunga Vasicek dinyatakan dengan $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n P(\tau)\,{}_t p_x\, dt \tag{16}$$

$$= A(\tau)\exp^{-B(\tau)} r_t\,{}_t p_x\, dt$$

$$= \int_0^n \left[\left(\left(\bar{r} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)\left[\tau - B(\tau)\right] - \frac{\sigma^2}{4\kappa}\left(B(\tau)\right)^2\right)\exp\left(-B(\tau)r_t\right)\right]{}_t p_x\, dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \left[\left(\left(\bar{r} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)\left[\tau - B(\tau)\right] - \frac{\sigma^2}{4\kappa}\left(B(\tau)\right)^2\right)\exp\left(-B(\tau)r_t\right)\right]\left(\exp - \int_0^n \mu_{x+s} ds\right) dt$$

Berdasarkan persamaan (2.1.11) dan (3.1.12) maka premi asuransi jiwa seumur hidup dengan suku bunga Vasicek adalah

$$P\bar{a}_{x:\overline{n}|} = BA^1_{x:\overline{n}|}$$

$$P = B\frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{17}$$

Studi kasus

Dengan menggunakan bahasa pemograman R diperoleh hasil nilai asuransi, anuitas, dan harga premi bersih asuransi jiwa berjangkanya dengan menetapkan asumsi data sebagai berikut :

Tetapan gompertz B	= 0.001
Tetapan gompertz C	= 1.1
Suku bunga jangka panjang $(\bar{r})$	= 0.051
Suku bunga instan (r_t)	= 0.0675
Jumlah konversi bunga setahun κ	= 0.25
Benefit	= 50 juta
Usia	= 30 tahun
Masa kontrak asuransi	= 15 tahun

Perbandingan Premi Model Vasicek dan Konstan Berdasarkan Perubahan Suku Bunga

Perubahan tingkat suku bunga pada setiap periode akan memberikan pengaruh pada nilai premi yang akan dibayarkan nasabah. Berikut akan diberikan grafik serta tabel yang menunjukkan harga premi atas perubahan tingkat suku bunga model Vasicek dan perbandingannya terhadap suku bunga konstan.

Tabel 1 Harga premi dengan suku bunga konstan

Asuransi	Anuitas	Premi
0.086017	8.31937	516968

Tabel 2 Harga premi, anuitas dan asuransi dengan suku bunga model Vasicek berdasarkan perubahan tingkat suku bunga

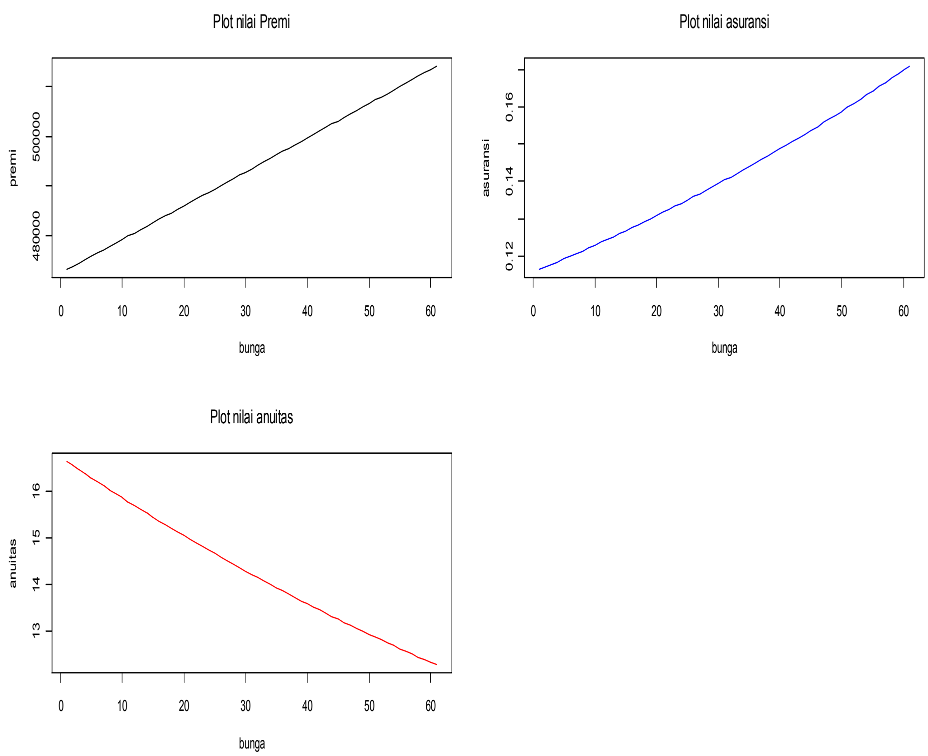
Bunga	Asuransi	Anuitas	Premi	Bunga	Asuransi	Anuitas	Premi
0.03	0.116203	16.64611	473119.3	0.061	0.141242	14.14644	494177.9
0.031	0.116917	16.55588	473790.2	0.062	0.142159	14.07518	494864.4
0.032	0.117637	16.46635	474461.8	0.063	0.143085	14.00445	495551.2
0.033	0.118362	16.3775	475134.1	0.064	0.144017	13.93424	496238.3
0.034	0.119093	16.28933	475807	0.065	0.144958	13.86457	496925.7
0.035	0.11983	16.20184	476480.5	0.066	0.145906	13.79541	497613.4
0.036	0.120573	16.11502	477154.6	0.067	0.146862	13.72676	498301.4
0.037	0.121321	16.02886	477829.4	0.068	0.147826	13.65863	498989.6
0.038	0.122076	15.94337	478504.7	0.069	0.148798	13.591	499678.1
0.039	0.122838	15.85852	479180.7	0.07	0.149778	13.52388	500366.9
0.04	0.123605	15.77433	479857.2	0.071	0.150766	13.45725	501055.9
0.041	0.124378	15.69077	480534.2	0.072	0.151762	13.39112	501745.1
0.042	0.125158	15.60785	481211.9	0.073	0.152767	13.32547	502434.5
0.043	0.125944	15.52557	481890	0.074	0.153779	13.26031	503124.2
0.044	0.126736	15.44391	482568.7	0.075	0.154801	13.19563	503814
0.045	0.127535	15.36287	483248	0.076	0.15583	13.13143	504504
0.046	0.128341	15.28244	483927.7	0.077	0.156869	13.06771	505194.2
0.047	0.129153	15.20262	484608	0.078	0.157915	13.00445	505884.5
0.048	0.129971	15.12341	485288.7	0.079	0.158971	12.94165	506575
0.049	0.130796	15.0448	485969.9	0.08	0.160036	12.87932	507265.7
0.05	0.131628	14.96679	486651.6	0.081	0.161109	12.81745	507956.4
0.051	0.132467	14.88936	487333.7	0.082	0.162191	12.75603	508647.3
0.052	0.133313	14.81252	488016.3	0.083	0.163282	12.69506	509338.2
0.053	0.134165	14.73625	488699.3	0.084	0.164383	12.63454	510029.3
0.054	0.135025	14.66057	489382.8	0.085	0.165492	12.57445	510720.4

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Bunga	Asuransi	Anuitas	Premi
0.055	0.135891	14.58545	490066.6
0.056	0.136765	14.51089	490750.9
0.057	0.137646	14.4369	491435.6
0.058	0.138534	14.36346	492120.6
0.059	0.139429	14.29058	492806
0.06	0.140332	14.21824	493491.8

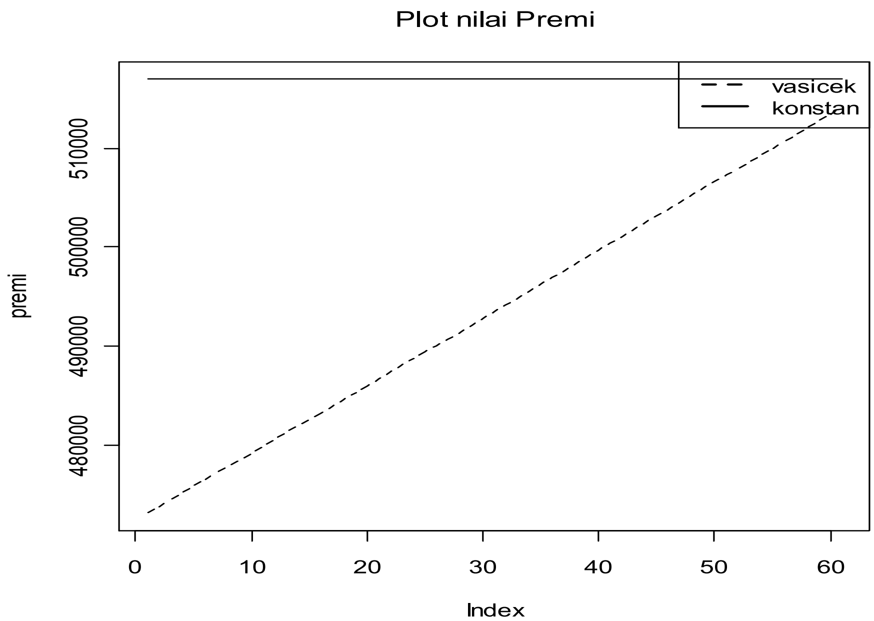
Bunga	Asuransi	Anuitas	Premi
0.086	0.166611	12.51481	511411.6
0.087	0.167739	12.45561	512102.8
0.088	0.168877	12.39683	512794.1
0.089	0.170024	12.33848	513485.5
0.09	0.171181	12.28056	514176.8

Dengan interval perubahan suku bunga antara 3-9% diperoleh bahwa harga premi suku bunga Vasicek adalah lebih rendah dibandingkan dengan menggunakan suku bunga konstan. Dan untuk melihat lebih jelas ditampilkan perbandingan harga premi suku bunga model Vasicek dan konstan sebagai berikut:



Gambar 1 Grafik harga premi, asuransi dan anuitas asuransi jiwa berjangka model Vasicek berdasarkan perubahan tingkat suku bunga

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan



Gambar 2 Gafik perbandingan premi asuransi jiwa berjangka model Vasicek dan suku konstan berdasarkan perubahan tingkat suku bunga

KESIMPULAN

Dalam tesis ini dibahas tentang pembentukan nilai premi asuransi jiwa berjangka dengan menggunakan suku bunga deterninistik dan suku bunga stokastik model Vasicek dan dalam implementasinya dalam perhitungan nilai asuransi, aniutas, serta premi, dengan hasil sebagai berikut :1) Nilai asuransi, anuitas serta premi pada suku bunga deterministik yang selalu konstan lebih tinggi nilainya dibandingkan dengan menggunakan suku bunga stokastik model Vasicek; 2) Dalam simulasi data dengan menggunakan model Vasicek yang diperoleh bahwa terdapat pengaruh jika nilai benefit, usia, suku bunga instan, suku bunga jangka panjang volatilitas dan asumsi gompertz yakni akan meningkat nilai anuitas, asuransi serta premi yang naik pula. Namun jangka waktu yang panjang akan relatif menurunkan nilai anuitas, asuransi serta premi.

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics 2nd Editon* . Belmont. California : Duxbury Press.

Bowers, N.L, et al. 1997. *Actuarial Mathematics 2nd Editon.* Schaumburg, Illinois : The Society of Actuaries.

Jordan, C.W. 1991. *Life Contingencies 2nd Editon.* Chicago, Illinois : The Society of Actuaries.

Lin, X.S. 2006. *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance* Hoboken, New Jersey : Willey & Sons, Inc.

Noviyanti, L. And Syamsuddin, M. 2005. Life Insurance with Sthochastic Interest Rate, *Proceedings 13th East Asian Actuarial Conference The Actuary at Risk*, The Society of Actuaries of Indonesia.

Kellison, S.G., 1991. *The Theory of Interest 2nd Editon*, Irwin Homewood, Boston.

Ross, S. M., 1983. *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New York.

Seydel, R.U., 2006. *Tools for Computational Finance third edition*. Netherland. Springer-Verlag.

Sula, M.S. 2004. *Asuransi Syariah (Life and General) : Konsep dan Sistem Operasional.* Jakarta : Gema Insani.

Vasicek, O. 1977. An Equilibrium Characterization of Term Structure. *Jounal of Economics.*

Sudianto Manullang adalah Dosen Jurusan Matematika, Program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan