Metode Heuristik untuk Menyelesaikan Masalah Optimisasi Portfolio Berbasis Mean-Variance-Value at Risk

Erlinawaty Simanjuntak

Abstrak

Suatu masalah optimisasi portfolio dibatasi oleh risk-downside yang dipertimbangkan. Juga diperhatikan pembatas yang membatasi peubah perdagangan integer, pembatas-pembatas pada ukuran saham dari beberapa aset atau pada jumlah maksimum aset berbeda dalam portfolio. Oleh karena itu model optimisasi dapat menjadi sangat kompleks sebagai masalah fungsi naik yang menjadi nonconvex dan diskontinu. Masalah ini dimodelkan sebagai sebuah integer nonconvex masalah program kuadratik. Penelitian ini untuk sebuah pencarian heuristik feasible neighborhood dalam penyelesaian masalah.

Kata Kunci : *Optimisasi portfolio*

PENDAHULUAN

Teori portfolio modern dimulai pada tahun 1952, dengan berhasilnya metode memilih portfolio yang diusulkan oleh Harry Markowitz dalam artikelnya yang berjudul *Portfolio Selection.* Beliau menyarankan cara seorang investor dapat membentuk portfolio yang menghasilkan tingkat keuntungan paling tinggi berdasarkan suatu tahap resiko, ataupun membentuk portfolio yang beresiko paling rendah pada suatu tahap tingkat keuntungan. Kemudian William Sharpe (1965) memperkenalkan model indek tunggal yang merupakan satu penyesuaian dari pada model Markowitz. Model indek tunggal ini membolehkan lebih banyak jumlah sekuritas dianalisis dibandingkan dengan model Markowitz yang memerlukan penaksiran yang begitu banyak jika jumlah sekuritas ditambahkan.

Berdasarkan pendekatan Markowitz (1952) yang dimulai dengan asumsi bahwa investor telah mengeluarkan sejumlah uang untuk investasi masa kini. Uang ini akan diinvestasikan untuk jangka waktu tertentu yang disebut periode kepemilikan investor. Pendekatan Markowitz dapat dipandang sebagai pendekatan periode tunggal, dengan permulaan periode dinotasikan t = 0 dan akhir periode dinotasikan t = 1. Di t = 0, investor harus membuat

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

keputusan sekuritas apakah yang akan dibeli dan dimiliki sampai t = 1.

Pendekatan mean-varians adalah metode yang paling awal untuk memecahkan masalah pemilihan portfolio. Akan tetapi, ada beberapa pendapat yang menentangnya, meskipun pendekatan ini telah diterima dan dihargai oleh praktisi dan akademisi selama beberapa tahun (Korn, 1997). Meminimumkan varians tidak hanya mendorong kearah deviasi rendah dari hasil yang diharapkan pada sisi bawah rata-rata, tetapi juga pada sisi atas rata-rata.

Pendekatan mean-varians mengarah ke pengurangan resiko, tetapi pendekatan mean-VaR kadangkala tidak mengarah pada pengurangan resiko. Pendekatan mean-varians tidak hanya mengawasi hasil resiko pada sisi bawah rata-rata, tetapi juga keuntungan yang mungkin pada sisi atas rata-rata selama pendekatan mean-VaR hanya mengendalikan hasil resiko pada sisi bawah rata-rata. Pada batasan lain dari dua pendekatan ini adalah bahwa distribusi hasil tidak terlalu dipahami, dan disana tidak ada informasi derajat tingkat lebih tinggi kecuali means, kovarians (varians) dan nilai dari VaR.

Sebagai ganti penggunaan satu ukuran resiko tunggal (mean-varians dan mean-VaR), juga diusulkan suatu pendekatan umum mean-varians-VaR yang menggunakan varians dan VaR sebagai ukuran resiko ganda secara serempak. Dengan membandingkan model mean-varians dan model mean-VaR akan digunakan ukuran resiko ganda sebagai pengganti ukuran resiko tunggal.

Mean-Variance-VaR

Tujuan utama seorang investor adalah mengalokasikan secara optimal investasinya diantara asset yang berbeda. Adapun model optimisasi portfolio berdasarkan mean, varians, dan value at risk yang diajukan oleh Jin Wang (2000) adalah sebagai berikut :

Pendekatan Mean-Variance

Andaikan ada n sekuritas dengan tingkat pengembalian X_i (i = 1, 2, …, n). Means dan kovarians dari tingkat return (R) ini adalah :

$$\mu_i = E(X_i) \ dan \ \sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j), \ i, j = 1, \dots, n$$

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Vektor portfolio adalah : $w = (w_1, ..., w_n)' \subset R^n \; dan \; \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Definisikan bahwa kumpulan W adalah koleksi dari semua portfolio yang mungkin : $W = \left\{ w \subset R^n \; \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$

Hasil total dari portfolio adalah : $R_w = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$

Mean dan variansnya adalah :

$\mu_w = E(R_w) = E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$ dan $\sigma_w^2 = \text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$

Ada dua model umum yang menggunakan prinsip mean-variance. Ide untuk model pertama adalah memberi batas atas σ_0^2 untuk hasil varians portfolio, memilih suatu portfolio w, hingga μ_w adalah maksimum dengan $\sigma_w^2 \leq \sigma_0^2$:

$$\max_{w \in W} \mu_w$$

$$\text{kendala : } \sigma_w^2 \leq \sigma_0^2 \qquad (1)$$

Tahap model kedua untuk memberi batas bawah μ_0 untuk mean hasil portfolio, memilih suatu portfolio w, hingga σ_w^2 adalah minimum dengan $\mu_w \geq \mu_0$:

$$\min_{w \in W} \sigma_w^2 \qquad (2)$$

$$\text{kendala : } \mu_w \geq \mu_0$$

Pendekatan Mean-VaR

VaR mengukur kerugian harapan terburuk yang melebihi batas waktu yang diberikan atas kondisi pasar normal pada suatu tingkat kepercayaan yang diberikan, dan menyediakan pemakai-pemakai suatu ukuran ringkasan resiko pasar. Tepatnya, VaR pada tingkat kepercayaan 100% dari suatus portfolio w untuk suatu periode waktu khusus dari tingkat pengembalian q_w sehingga probabilitas dari portfolio memiliki tingkat pengembalian q_w atau lebih sedikit adalah α :

$$P(R_w \leq q_w) = \alpha \qquad (3)$$

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Sama seperti metode mean-variance, didefinisikan dua model untuk prinsip mean-VaR. Pertama adalah bahwa untuk batas atas yang diberikan *q0* untuk VaR hasil portfolio, memilih suatu portfolio *w*, sehingga μ_w adalah maksimum dengan

$$q_w \leq q_0 : \qquad \max_{w \in W} \mu_w \qquad (4)$$

$$\text{kendala : } q_w \leq q_0$$

Tahap model kedua bahwa untuk batas atas μ_0 yang diberikan untuk mean dari hasil portfolio, memilih suatu portfolio *w*, sehingga Var q_w adalah minimum dengan

$$\mu_w \geq \mu_0 : \qquad \min_{w \in W} q_w \qquad (5)$$

$$\text{kendala : } \mu_w \geq \mu_0$$

dimana : R = hasil portfolio
W = kumpulan semua portfolio yang mungkin
w = vektor portfolio
μ_w = batas bawah rat-rata
μ_0 = batas atas rata-rata
σ_w^2 = batas bawah varians
σ_0^2 = batas atas varians
q_0 = batas atas tingkat pengembalian
q_w = batas bawah tingkat pengembalian

Perbandingan Pendekatan Mean-Variance dan Mean-VaR

Pada bagian ini, dibandingkan pendekatan mean-VaR dengan pendekatan mean-varians. Dua pendekatan ini menggunakan dengan sepenuhnya ukuran resiko untuk optimisasi portfolio. Kedua pendekatan ini mempunyai banyak keuntungan; namun pendekatan ini tidak cukup hanya menggunakan informasi dari distribusi hasil portfolio. Seperti ukuran resiko, varians dan VaR adalah mandiri secara umum. Satu pengecualian bahwa ukuran VaR adalah sebanding kepada ukuran varians pada kasus multivariat normal.

Pendekatan Mean-Variance-VaR

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Pada bagian ini, diusulkan suatu model umum mean-varians-VaR untuk optimisasi portfolio dengan dua variasi. Digunakan kedua variasi dan VaR sebagai pengontrol ukuran resiko. Model-modelnya meliputi model mean-varians dan model mean-VaR.

Model pertama memberi batas atas σ_0^2 dan q_0 masing-masing untuk varians dan VaR untuk hasil portofolio berturut-turut, yang memilih sebuah portfolio w, sehingga μ_w adalah maksimum dengan $\sigma_w^2 \le \sigma_0^2$ dan $q_w \le q_0$:

$$\begin{aligned} &\max\ \mu_w \\ &w \subset W \\ &s.t\ \ \sigma_w^2 \le \sigma_0^2 \\ &\qquad q_w \le q_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Bandingkan dengan model mean-variance atau model mean-VaR, digunakan ukuran resiko ganda sebagai pengganti satu ukuran resiko tunggal. Portfolio efisien mean-variance-VaR tidak mungkin menjadi mean-variance atau mean-VaR. Lebih dari itu, model mean-variance (1) dan model mean-VaR (4) adalah kasus khusus dari model (6) :

- Ketika $q_0 = \infty$, model (6) menjadi model mean-variance (1)
- Ketika $\sigma_0^2 = \infty$, model (6) menjadi model mean-VaR (4)

Model yang kedua memberi batas bawah μ_0^2 untuk mean dari hasil portfolio, yang memilih sebuah portfolio w, seperti variance dari kombinasi convex dan VaR dari hasil portfolio $\beta\sigma_w^2 + (1-\beta)\,q_w$ adalah minimum dengan $\mu_w \ge \mu_0$:

$$\min_{w \in W}\ \beta\sigma_w^2 + (1-\beta)q_w \tag{7}$$

Kendala : $\mu_w \ge \mu_0$

Disini $\beta \subset [0,1]$ adalah sebuah parameter yang didefinisikan konstan, jika kedua nilai β ekstrem, diperoleh :

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

- Ketika β = 1, model (7) menjadi model mean-variance (2)
- Ketika β = 0, model (7) menjadi model mean-VaR (5)

VALUE at RISK dan EXPECTED SHORTFALL

Model umum untuk seleksi portfolio telah dikembangkan selama beberapa tahun, mulai dari format awal mean-varians berdasarkan pada kerja Markowitz (1952) sampai pada yang terbaru skenario berdasarkan bentuk optimisasi stokastik. Salah satu tehnik yang cukup terkenal untuk mengukur downside risk adalah Value at Risk (VaR)

Value at Risk

Value at Risk (VaR) sekarang ini menjadi alat standar dalam mengelola resiko pada bank dan institusi keuangan lainnya. Hal ini diartikan sebagai kerugian untuk suatu tingkat kepercayaan yang diberikan. Dalam teori peluang, VaR adalah 1% kuartil (pada umumnya (1-p)% kuartil) dari keuntungan dan distribusi kerugian.

VaR as A Risk Measurement Problem

Sebagai ilustrasi masalah VaR sebagai sebuah ukuran resiko, mengingat sebuah bank dimana batas VaR (tingkat kepercayaan 99%) dari 50.000 euro ditentukan pada seorang pedagang tertentu. Artinya bahwa kerugian lebih dari 50.000 euro akan terjadi hanya sekali pada setiap ratusan hari perdagangan dalam rata-rata. Tetapi karena dari definisi VaR, tidak ada perbedaan antara pelanggaran yang kecil sampai sangat besar dari batas 50.000 euro. Maka kerugian dapat menjadi 60.000 euro bahkan 600.000 euro. Meskipun pada kenyataannya VaR kemudian digunakan sebagai sebuah kriteria untuk mengganti resiko biasa, pedagang memiliki sebuah insentif untuk menjalankan strategi yang akan menciptakan sebuah keuntungan tambahan pada banyak kasus, tetapi dengan mengorbankan peluang hanya dibawah 1% dari kerugian yang sangat besar.

Derivatif VaR

Pada prakteknya kontribusi resiko marginal sering menarik kesimpulan dari posisi baru untuk standar deviasi portfolio. Bagaimanapun, tanpa asumsi berdistribusi normal, tidak ada

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

hubungan tertutup antara standar deviasi dan VaR.

Andaikan nilai portfolio aktual dijelaskan dengan variabel random X dan *a* bagian dari variabel random Y lainnya yang ditambahkan pada portfolio tersebut, maka hal ini memungkinkan untuk menghitung derivatif dari ukuran resiko terhadap *a*. Pada kenyataannya derivatif kedua yang harus menjadi positif untuk sebuah ukuran resiko convex yang memenuhi sifat sub-additivity.

Derivatif Pertama dan Kedua VaR

Sekarang ganti standar deviasi dengan VaR sebagai sebuah ukuran alternatif dari resiko. Asumsikan bahwa X,Y dengan kontinu distribusi variabel random (dimana f_x merupakan density dari X) dan mendefinisikan VaR_p (X + aY) sebagai fungsi dari a secara mutlak oleh peluang (-X – aY ≤ VaR_p (X + aY)) = p = const. Kemudian dimiliki sebuah hasil yang baik: derivatif VaR adalah ekspektasi kondisional dari posisi marginal, pada kondisi yang nilai aktual portfolio X dan VaR yang seharusnya identik (Gourieroux *et al* (2000), Tasche (1999)):

$$\frac{\partial VaR_p(X+aY)}{\partial a}\Big|_{a=0} = \mu(-Y \big| -X = VaR_p(X))$$

Pengertian dibelakang hasil ini adalah sebagai berikut : jika X > VaR (X) (kerugian aktual telah lebih besar dari VaR) atau jika X < VaR (X) (ada sebuah sisa penyokong), penambahan sebagian kecil resiko baru tidak akan merubah hasil. Oleh karena itu, dapat diterima bahwa kontribusi resiko adalah nilai rata-rata untuk semua kasus kritis dengan X = VaR (X).

Untuk derivatif kedua dapat mengikuti pernyataan berikut (Gourieroux *et al* (2000) :

$$\frac{\partial^2 VaR_p(X+aY)}{\partial a^2}\Big|_{a=0} = \left[\frac{\partial \sigma^2(Y \big| X=x)}{\partial x} + \sigma^2(Y \big| X=x)\frac{\partial Inf_X(x)}{\partial x}\right]_{x=-VaR_p(X)}$$

Ini adalah jumlah dari dua faktor. Tanda dari istilah kedua adalah positip jika kemiringan density naik pada sisi kiri. Ini biasanya jadi kasus (jika distribusi adalah unimodal). Tidak jelas tanda dari faktor pertama. Untuk mendapat sebuah pengertian, posisi baru yang ditambah pada

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

portfolio juga dapat mengangkat nilai portfolio diatas VaR-threshold. Jika sebuah pelanggaran yang permulaan akan terjadi sebaliknya. Jika $\partial\sigma^2 (Y|x)/\partial x$ adalah negatif (varians adalah sebuah fungsi turun dari X), kesempatan bahwa posisi baru menjaga sebuah pelanggaran dari VaR-threshold lebih besar dari hubungan resiko yang pelanggaran VaR-thresholdnya digerakkan oleh posisi baru.

Expected Shortfall

Artzner *et al* (1997) mengajukan kegunaan expected shortfall yaitu untuk mengurangi masalah yang ada pada VaR. Expected Shortfall mempertimbangkan kerugian yang melebihi tingkat VaR dan ditunjukkan menjadi sub-additive, selama VaR mengabaikan kerugian yang melebihi persen dan tidak sub-additive

Definisi dan Konsep Expected Shortfall

Artzner *et al* (1997) telah mengajukan kegunaan expected shortfall (yang disebut "kondisional VaR", "mean excess less", "beyond VaR" atau "tail VaR") untuk mengurangi masalah yang melekat pada VaR. Expected Shortfall didefinisikan sebagai berikut :

Andaikan x sebuah variabel random yang merupakan kerugian dari pemberian portfolio dan VaR $_\alpha$(X) adalah VaR pada tingkat kepercayaan 1000(1-α) persen. ES $_\alpha$(X) didefinisikan dengan mengikuti persamaan : ES $_\alpha$(X) = E $\left[X|X \geq VaR_\alpha(X)\right]$.

Expected shortfall mengukur berapa banyak sesuatu dapat hilang pada rata-rata dalam tahap yang melebihi tingkat VaR. Ketika distribusi yang hilang tidak normal, VaR mengabaikan kerugian yang melebihi tingkat VaR dan kegagalan untuk jadi sub-additive. Expected shortfall mempertimbangkan kerugian yang melebihi tingkat VaR dan ditunjukkan untuk menjadi sub-additive.

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

OPTIMISASI PORTFOLIO BERDASARKAN PADA EXPECTED SHORTFALL

Optimisasi Portfolio berdasarkan pada VaR dengan Metode Varians-Kovarians.

Optimisasi portfolio berdasarkan pada VaR adalah saat VaR dihitung dengan metode varians-kovarians. Analisis tradisional mean-varians langsung dipakai untuk VaR berdasarkan optimisasi portfolio. Analisis mean-varians memilih portfolio dengan profil mean-varians terbaik dengan meminimumkan subyek varians untuk pembatas dari hasil ekspektasi portfolio. Masalah optimisasi ini dibentuk sebagai berikut :

$$\min_{\{\omega\}} \frac{1}{2}\omega' \sum \omega, \qquad (8)$$

kendala :

$$\omega' \mu = \mu_x$$
$$\omega' e = 1$$

dimana :
μ : vektor nilai ekspektasi faktor resiko
μ_x : nilai ekspektasi tertentu pada portfolio
$\sum$: matriks varians-kovarians faktor resiko
e : salah satu vektor
ω : vektor pembukaan untuk faktor resiko
ω' : vektor transpos ω

Solusi untuk masalah ini diberikan sebagai ω untuk setiap μ_x, dari yang diperoleh sebuah optimisasi σ_x untuk setiap μ_x. Hubungan antara σ_x dan μ_x memberi efficient frontier pada tahap μ_x - σ_x. Dari efficient frontier ini, dipilih portfolio terbaik yang toleransi resikonya pas dan memberi hasil yang besar.

Optimisasi Portfolio berdasarkan pada VaR dengan metode berbasis Simulasi

Saat VaR dihitung dengan simulasi, ini bukan perpanjangan sebuah alat efisien untuk optimisasi sebuah portfolio, karena VaR bukan perpanjangan sebuah perkalian skalar dari standar deviasi dan bukan optimisasi yang menggunakan persamaan (8).

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Optimisasi Portfolio berdasarkan Expected Shortfall dengan metode berbasis Simulasi

Asumsikan bahwa kerugian portfolio X, sebuah kombinasi linier dari kerugian individu faktor resiko X_i (i merupakan faktor resiko) :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \omega_i . \qquad (9)$$

dimana : X = portfolio yang hilang
X_i = kerugian individu faktor resiko i
ω_i = sensitivity individu faktor resiko i

Kita juga asumsikan bahwa kerugian faktor resiko (X_i, … , X_n) memiliki kepadatan peluang fungsi p(X_i, … , X_n). Andaikan $\Psi(\omega,\beta)$ merupakan peluang kerugian portfolio X tidak melebihi beberapa permulaan nilai β.

$$\Psi(\omega,\beta) = \int_{\sum_{i=1}^{n} x_i\omega_i \le \beta} p(X_1,\ldots,X_n)\, dX_1 \ldots dX_n . \qquad (9)$$

VaR pada tingkat kepercayaan 100α % yaitu $\beta(\omega,\alpha)$ didefinisikan oleh :

$$\beta(\omega,\alpha) = \min \left\{\beta \in \mathbf{R} \middle| \Psi(\omega,\beta) \ge \alpha\right\} \qquad (10)$$

Kemudian didefinisikan mengikuti fungsi yang ditunjukkan oleh $\Phi(\omega)$.

$$\Phi(\omega) = \int_{\sum_{i=1}^{n} X_i\omega_i \ge \beta(\omega,\alpha)} (\sum_{i=1}^{n} X_i\omega_i).p(X_1,\ldots,X_n)dX_1 \ldots dX_n , \qquad (11)$$

Expected Shortfall adalah $\Phi(\omega)/(1-\alpha)$, sejak itu ekspektasi kondisional memberikan bahwa kerugian portfolio $\sum_{i=1}^{n} X_i\omega_i$ lebih dari $\beta(\omega,\alpha)$. Ini sulit untuk mengoptimisasikan $\Phi(\omega)$ karena $\beta(\omega,\alpha)$ berbelit-belit dalam definisinya. Rockafeller dan Uryasev (2000) menunjukkan bahwa optimisasi $\Phi(\omega)$ adalah sama dengan optimisasi $F(\omega,\beta)$.

$$F(\omega,\beta) = (1\text{-}\alpha)\beta + \int_{\omega} (\sum_{i=1}^{n} X_i\omega_i - \beta)^{+}\, p(X_i,\ldots,X_n)dX_1 \ldots dX_n . \qquad (12)$$

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Selanjutnya, expected shortfall diberikan sebagai minimum $F(\omega,\beta)/(1-\alpha)$ dengan kendala β, dan VaR diberikan sebagai koresponden β.

Hasil ini digunakan untuk meminimumkan simulasi berdasarkan expected shortfall. Andaikan kita contohkan waktu $X_1, \ldots, X_nJ$ (contoh ini ditunjukkan oleh X_{ij}, i = 1, …, n, j = 1, …, J) dari fungsi peluang kepadatan $p(X_i, \ldots, X_n)$. Integral dalam persamaan (12) dihitung dengan cara :

$$\int_{\omega} (\sum_{i=1}^{n} X_i\omega_i - \beta)^{+} p(X_1,\ldots,X_n)dX_1 \ldots dX_n \approx J^{-1}\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\omega_i - \beta\right)^{+} \quad (13)$$

Kurangi minimisasi dari $F(\omega,\beta)$ untuk mengikuti masalah program linier.

$$\min_{\omega\in\mathbf{R}^n, z\in\mathbf{R}^J, \beta\in\mathbf{R}} (1-\alpha)\beta + J^{-1}\sum_{j=1}^{J} z_j \quad (14)$$

dengan kendala : $z_j \geq \sum_{i=1}^{n} X_{ij}\omega_i - \beta,\ z_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,J$ (15)

Kendala pada nilai ekspektasi portfolio diformulasikan sebagai berikut :

$$J^{-1}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\omega_i = -R \quad (16)$$

Selanjutnya, kendala pada jumlah investasi portfolio dibentuk sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\omega_i = W_o. \quad (17)$$

dimana : P_i : nilai inisial faktor resiko i

W_0 : inisial jumlah investasi pada portfolio

HEURISTIK FEASIBLE NEIGHBORHOOD SEARCH

Model-Model Pemilihan Portfolio

Pendekatan mean-variansi

Optimisasi mean-varians merupakan suatu pendekatan yang cukup terkenal untuk pemilihan portfolio. Nyatakan x_i, $i = 1, \ldots, n_A$, jumlah investasi dalam aset i dari modal awal v^0 dan r_i, $i = 1, \ldots, n_A$, perolehan aset pada periode perencanaan, maka ekspektasi perolehan pada portfolio yang didefinisikan oleh vektor $x = (x_1, x_1 \ldots, x_{n_A})'$ diberikan sebagai : $\mu(x) = \frac{1}{v^0} x'E(r)$. Variansi perolehan portfolio adalah : $\sigma^2(x) = x'Qx$ dimana Q adalah matriks variansi dan kovarians dari vektor perolehan r.

Jadi portfolio efisien mean-varians yang didefinisikan sebagai hasil ekspektasi perolehan tertinggi untuk varians yang diberikan dan

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

varians minimum untuk nilai ekspektasi yang diberikan, didapat dengan menyelesaikan program kuadratik berikut :

$$\begin{aligned} &\min_x x'Qx \\ &\textstyle\sum_j x_j r_j \geq \rho v^0 \\ &\textstyle\sum_j x_j = v^0 \\ &x_j^\ell \leq x_j \leq x_j^u \qquad j \in P. \end{aligned} \tag{18}$$

untuk harga ρ yang berbeda, dimana ρ adalah perolehan yang diinginkan pada portfolio dan P adalah kumpulan aset dalam portfolio tersebut. Vektor-vektor $x_j^\ell, x_j^u, j \in P$, menyajikan kendala terhadap ukuran minimum dan maksimum aset individu dalam portfolio optimal.

Implementasi dari model markowitz dengan n_A asset yang membutuhkan n_A estimasi dari ekspektasi perolehan, n_A estimasi varians dan $n_A\ (n_A - 1)\ /\ 2$ koefisien korelasi.

Kerangka Dasar Mean Resiko-Downside

Pada prakteknya investor lebih peduli pada resiko yang nilai portfolionya jatuh dibawah level tertentu. Ini menjadi alasan mengapa perbedaan ukuran downside-risk dipertimbangkan dalam masalah alokasi aset. Jika v menyatakan nilai portfolio masa datang, yaitu nilai portfolio pada akhir periode perencanaan, maka probabilitas :

$$P(v < \mathrm{VaR}) \tag{19}$$

bahwa nilai portfolionya jatuh dibawah tingkat VaR disebut *probabilitas shortfall.*

Nilai mean bersyarat dari portfolio dengan diketahui bahwa portfolio telah jatuh dibawah VaR, disebut *ekspektasi shortfall*, didefinisikan sebagai:

$$E(v \mid v < \mathrm{VaR}) \tag{20}$$

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Ukuran resiko lainnya yang dapat dipakai adalah *mean semi-absolute deviasi.* $E(|v - Ev| \mid v < Ev)$ dan *semi-variansi* $E((v - Ev)^2 \mid v < Ev)$ dimana hanya diperhatikan deviasi negatif dari mean.

Jika profil resiko dari investor ditentukan oleh VaR, portfolio efisien mean-VaR akan menjadi penyelesaian dari masalah optimisasi berikut :

$$\begin{aligned} &\max_x Ev \\ &P(v < \mathrm{VaR}) \le \beta \\ &\textstyle\sum_j x_j = v^0 \\ &x_j^\ell \le x_j \le x_j^u \qquad j \in P \end{aligned} \tag{21}$$

Selanjutnya, adalah realistis untuk memperhatikan seorang investor yang tidak hanya peduli pada probabilitas shortfall, tapi juga sejauh mana nilai portfolionya dapat jatuh dibawah level VaR. Pada kasus ini, profil resiko investor didefinisikan melalui suatu kendala ekspektasi shortfall dengan tertoleransi v jika nilai portfolio merupakan jatuh dibawah VaR. Maka efisien portfolio mean-ekspektasi shortfall merupakan penyelesaian dari model program berikut:

$$\begin{aligned} &\max_x Ev \\ &E(v \mid v < \mathrm{VaR}) \ge v \\ &\textstyle\sum_j x_j = v^0 \\ &x_j^\ell \le x_j \le x_j^u \qquad j \in P \end{aligned} \tag{22}$$

Optimisasi Mean Resiko-Downside

Masalah selanjutnya adalah masalah optimisasi non-convex dan variabel integer dengan jenis kendala seperti saham dan ukuran perdagangan. Kita ingat bahwa masalah jenis ini tidak dapat diselesaikan dengan metode baku Quadratik Programming. Solusi dari hasil model program mixed-integer dapat dikerjakan oleh metode heuristik yang memberikan sebuah penaksiran dari solusi eksak. Dalam penelitian ini saya mengusulkan pencarian heuristic feasible neibhborhood untuk menyelesaikan masalah program kuadratik integer.

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Berikut ini kuantitas setiap aset pada portfolio dibatasi untuk menjadi sebuah bilangan integer. Pembentukan neighbor $x^1 \in N_x^0$ untuk sebuah solusi yang diberikan x^0 dilakukan dengan mengambil secara acak dua aset i dan j. Kemudian dijual k_i aset i, transfer jumlah ini menjadi tunai dan beli k_j aset j dari uang tadi. Supaya yakin bahwa setiap transfer berjumlah sama, jumlah aset k_i dan k_j yang ditransfer didefinisikan sebagai $k_i = \left| \frac{\max p^0}{p_i^0} \right|$ dan $k_j = \left| \frac{\max p^0}{p_{ji}^0} \right|$, dimana p^0 adalah vektor harga aset sekarang.

Terkait dengan variabel integer dan kendala pada minimum dan maksimum ukuran saham, terdapat bentuk formulasi masalah mean-VaR:

$$
\begin{aligned}
&\max_x Ev \\
&E(v \mid v < \text{VaR}) \leq \beta \\
&x'p^0 = v^0 \\
&\#\{P\} \leq K \\
&\left\lceil \frac{\omega_j^l v^0}{p_j^0} \right\rceil \leq x_j \leq \left\lceil \frac{\omega_j^u v^0}{p_j^0} \right\rceil \qquad j \in P
\end{aligned}
$$

dimana x_j, $j \in P$ adalah kuantitas integer setiap aset dalam portfolio dan K adalah jumlah maksimum aset yang boleh dalam portfolio. Demikian pula, untuk masalah mean-ES terdapat :

$$
\begin{aligned}
&\max_x Ev \\
&E(v \mid v < \text{VaR}) \geq v \\
&x'p^0 = v^0 \\
&\#\{P\} \leq K \\
&\left\lceil \frac{\omega_j^l v^0}{p_j^0} \right\rceil \leq x_j \leq \left\lceil \frac{\omega_j^u v^0}{p_j^0} \right\rceil \qquad j \in P
\end{aligned}
$$

Ketidakpastian tentang perolehan masa datang, yaitu tentang nilai portfolio masa datang v, dimodelkan melalui sebuah kumpulan realisasi yang mungkin, yang disebut skenario. Skenario hasil masa dapat digenerasikan dengan model statistik, perolehan masa lalu atau pendapat ahli. Disini, skenario diambil secara acak dari distribusi empiris perolehan masa lalu.

Memperkenalkan skenario harga pada perumusan mean-VaR dan mean-ES sebelumnya, diperoleh masalah berikut untuk kasus mean-VaR :

$$\min_x -\frac{1}{n_S}\sum_{s=1}^{n_S} x'p^s$$
$$\#\{s \mid x'p^s < \mathrm{VaR}\} \le \beta_{n_S}$$
$$x'p^0 = v^0$$
$$\#\{P\} \le K$$
$$\left\lceil \frac{\omega_j^l v^0}{p_j^0} \right\rceil \le x_j \le \left\lceil \frac{\omega_j^u v^0}{p_j^0} \right\rceil \qquad j \in P$$

dan untuk mean-ES

$$\min_x -\frac{1}{n_S}\sum_{s=1}^{n_S} v^s$$
$$\frac{1}{\#\{s \mid x'p^s < \mathrm{VaR}\}} \sum_{s \mid v^s < \mathrm{VaR}} v^s \ge v$$
$$x'p^0 = v^0$$
$$\#\{P\} \le K$$
$$\left\lceil \frac{\omega_j^l v^0}{p_j^0} \right\rceil \le x_j \le \left\lceil \frac{\omega_j^u v^0}{p_j^0} \right\rceil \qquad j \in P$$

Pencarian Heuristik Feasible Neighborhood

Pada dasarnya pendekatan branch and bound dapat dipakai, namun untuk beberapa kelas dari skala besar, masalah nonlinier prosedur demikian akan menjadi mahal terutama ditinjau dari waktu perhitungan. Disini dilakukan pendekatan yang memeriksa persoalan yang tereduksi dimana kebanyakan variabel integernya dipertahankan konstan dan hanya subset kecil dibiarkan berubah dalam langkah diskrit.

Ini dapat dilaksanakan dengan struktur dari sebuah program dengan mencatat semua variabel integer pada batasan dalam solusi kontinu sebagai nonbasis dan menyelesaikan masalah tereduksi dengan mempertahankannya sebagai nonbasis.

Prosedurnya dapat diringkas sebagai berikut :

Langkah 1 : Selesaikan masalah dengan mengabaikan syarat integer

Langkah2 :Peroleh sebuah (sub-optimal) solusi feasible integer; dengan menggunakan heuristik pembulatan dari solusi kontinu.

Langkah 3 : Bagi kumpulan *I* variabel integer kedalam kumpulan I_1 untuk variabel yang berada pada batasan yang nonbasis pada solusi kontinu dan kumpulan I_2, untuk variabel integer lainnya $I=I_1+I_2$.

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Langkah 4 : Lakukan pencarian pada fungsi objektif, pertahankan variabel pada I_1 nonbasis dan lakukan perubahan diskrit pada nilai variabel dalam I_2 .

Langkah 5 :Pada solusi yang dihasilkan di langkah 4, periksa reduced cost dari variabel pada I_1, jika ada yang akan dikeluarkan dari batasan mereka, tambahkan mereka ke kumpulan I_2 dan kembali ke langkah 4, jika tidak berhenti.

Ringkasan diatas memberikan kerangka dasar untuk perkembangan strategi spesifik terhadap masalah kelas khusus. Misalnya, heuristik pembulatan pada langkah 2 dapat disesuaikan dengan kondisi kendala, dan langkah 5 dapat mencakup penambahan satu variabel setiap kalinya ke kumpulan I_2.

KESIMPULAN

Pada kerangka dasarnya, investor dihadapkan dengan sebuah trade-off antara peluang portfolionya, yang dikarakterisasi oleh ekspektasi perolehan, dan resiko, yang diukur dengan variansi perolehan portfolio. Dua momen pertama dari perolehan yang akan datang dari portfolio cukup untuk mendefinisikan pengurutan langkah pilihan investor. Hasil ini disebabkan hipotesis penyederhanaan bahwa pilihan investor kuadratik dan perolehannya berdistribusi normal.

Selanjutnya, adalah realistis untuk memperhatikan seorang investor yang tidak hanya peduli pada probabilitas defisit, tapi juga sejauh mana nilai portfolionya dapat jatuh dibawah level VaR.

Model optimisasi portfolio dengan basis mean – varians – Value at Risk merupakan suatu model quadratic integer programing. Metode heuristic feasible neighborhood dipergunakan untuk menyelesaikan model tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath,1998, *Coherent Measures of Risk,* in : Math Finance 9 (3), pp. 203-228.

Korn, R., 1997, *Optimal Portfolios : Stochastic Models for Optimal Investment and Risk*

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Management in Continuous Time, Word Scientific, Singapore.

Leibowitz, M.L. and S. Kogelman, 1991, Asset Allocation under Shortfall Constraints*, Journal of Portfolio Management Winter, pp.18-23*

Lucas, A., and P. Klaassen, Extreme Returns, 1998, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation, *Journal of Portfolio Management 25*, *pp.71-79.*

Markowitz, H, 1952, Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7,* pp. 77-91

Rodoni Ahmad and Othman Yong, 2002, *Analisis Investasi dan Teori Portfolio,* PT. Rajagrafindo Persada, Jakarta.

Sharpe W, Lintner and Mossin,1965, Risk Aversion in The Stock Market : Some Empirical Evidence, *Journal of Finance, pp: 416-422..*

Sharpe W, 1995, *Investasi,* PT. Prenhalindo, Jakarta.

Speranza, M.G., and R. Mansini, 1999, Heuristik Algorithms for The Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lost, *European Journal of Operational Research 144(2*), pp. 219-233.

Wang Jin, 2000, *Mean-Variance-VaR Based Portfolio Optimization,* Working Paper, Valdosta State University, pp.3-17.

Yamai Yasuhiro and T. Yoshiba, 2002, Comparative Analysis of Expected Shortfall and Value-at-Risk : Their Estimation Error, Decomposition, and optimization, Monetary and Ekonomic Studies, Japan.

Erlinawaty Simanjuntak adalah Dosen Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan