

## ANALISIS STABILITAS LOKAL PENYEBARAN PENYAKIT ENDEMIK MODEL SI - SIIR DENGAN KONTROL VAKSINASI

**Tri Andri Hutapea**

### Abstrak

Penyebaran penyakit endemik akhir-akhir ini menjadi perhatian para praktisi kesehatan dan peneliti. Penerapan kajian persamaan diferensial (linear, non-linear, atau partial) dalam menyelesaikan masalah penyebaran penyakit endemik memberikan kesempatan untuk meneliti kontrol atau strategi terbaik. Model SI – SIIRS merupakan salah satu model penyebaran penyakit endemik (Hutapea Tri Andri., Kusomo Fajar Adi, *Majalah Berkala MIPA UGM Volume 19 Januari 2009*). Pada tulisan ini, kita akan menginvestigasi analisis stabilitas lokal pada penyebaran penyakit endemik dengan kontrol vaksinasi pada populasi I (SI) dan kontrol vaksinasi pada populasi (SIIR).

**Kata kunci:** *Endemik, Stabil Lokal, Model SI – SIIR, Kontrol Vaksinasi.*

### PENDAHULUAN

Suatu model matematika penyebaran penyakit endemik dibangun dengan mempertimbangkan kondisi dan karakteristik suatu penyakit, termasuk juga faktor – faktor yang terlibat di sekitar lokasi edemik. Penyebaran penyakit endemik dengan hewan sebagai vektor virus ke populasi manusia telah menyita perhatian dunia. Dalam 10 tahun terakhir, terdapat penyebaran virus H5N1 dengan unggas sebagai vektor virus dan penyebaran virus H1N1 (flu babi) dengan hewan babi sebagai vektor virus. Dalam kajian pemodelan matematika, model SI – SIIR atau pengembangannya merupakan model penyebaran penyakit endemik yang telah diteliti (Handoko, 2007; Iwami, 2008; Derouich and Boutayeb, 2008). Kompartemen SI, yaitu *susceptible*: kelompok individu<sub>1</sub> yang rentan, dan *infected*: kelompok individu<sub>1</sub>

yang tertular virus utama, merupakan kelompok populasi sumber virus atau penyakit endemik. Dalam tulisan, kompartemen SI merupakan asal penyakit atau virus selanjutnya akan menyebar ke populasi lain. Tentunya individu pada kompartemen SI ada interaksi dengan individu di populasi yang lain. Kompartemen SIIR, yaitu *susceptible*<sub>2</sub>: kelompok individu<sub>2</sub> rentan, *Infected*<sub>21</sub>: kelompok individu<sub>2</sub> terinfeksi karena virus (utama), *Infected*<sub>22</sub>: kelompok individu<sub>2</sub> yang terinfeksi setelah mutasi/perubahan virus utama, dan *Recovery*: kelompok individu<sub>2</sub> yang sembuh (Hutapea Tri Andri dan Kusomo Fajar Adi, *Majalah Berkala MIPA UGM Volume 19 Januari 2009*).

Vaksinasi merupakan salah satu kontrol penyebaran penyakit endemik. Misalnya, menurut WHO, pada tahun 2009 telah

**Tri Andri Hutapea** adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan.

ditemukan vaksin untuk meminimalisasi penyebaran penyakit DBD. Pada kasus ini, manusia yang diberikan vaksin. Namun terdapat pula penyebaran penyakit yang memungkinkan pemberian vaksin ke manusia atau ke individu sumber penyakit, misalnya penyebaran virus flu burung. Menurut WHO, pada Desember 2014, beberapa pusat penelitian bahkan universitas di dunia ini sudah berhasil menemukan vaksin untuk virus flu burung.

### **PEMBENTUKAN MODEL**

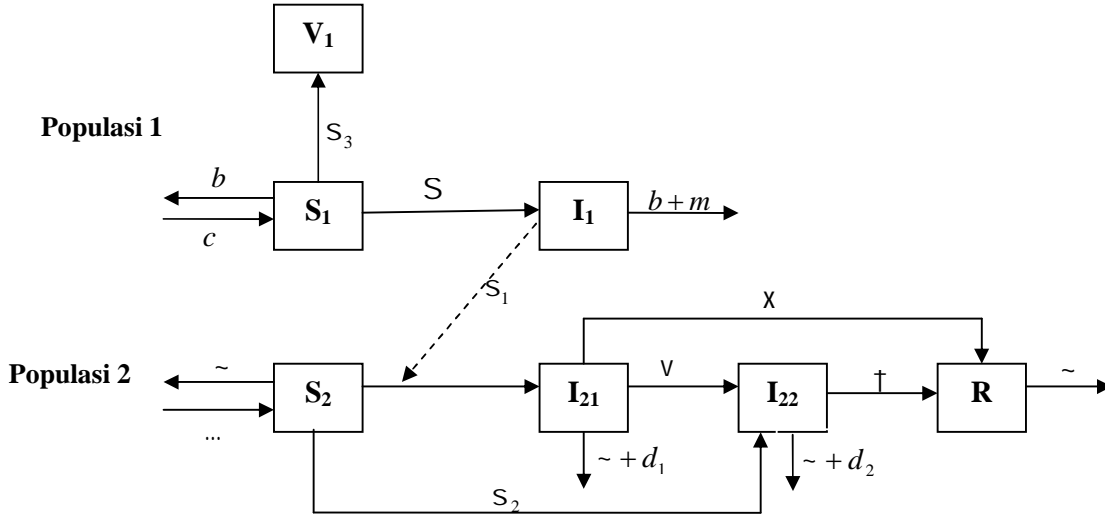
Pada tulisan ini, diasumsikan bahwa kedua populasi merupakan populasi terbuka dan setiap kelahiran masuk ke kompartemen yang rentan. Individu yang terinfeksi pada populasi 1 diasumsikan tidak memiliki kemungkinan untuk sembuh, tetapi individu pada populasi 2 memiliki kesempatan untuk sembuh. Penyebaran penyakit endemik pada populasi 2 disebabkan adanya laju kontak antara individu dari populasi 1 dengan individu dari populasi 2. Selain itu juga dikaji adanya pengembangan atau mutasi virus penyakit setelah endemik pada populasi 2.

Misalkan  $c$ : rekrutmen total pada populasi 1,  $b$ : laju kematian alami pada populasi 1,  $S$ : laju kontak individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi pada populasi 1,  $m$ : laju kematian karena virus utama pada populasi 1,  $S_1$ : laju kontak individu yang

Pada tulisan ini, akan dianalisis penyebaran penyakit endemik model SI – SIIR dengan kontrol vaksinasi pada kelompok SI. Selain pertimbangan ekonomi, hal ini dilakukan dengan pertimbangan menghilangkan virus utama pada populasi yang lebih mudah terjangkit endemik virus utama sedemikian sehingga tidak akan terjadi lagi endemik virus pada populasi SIIR

terinfeksi pada populasi 1 dengan individu yang rentan pada populasi 2,  $\dots$ : rekrutmen total pada populasi 2,  $\sim$ : laju kematian alami pada populasi 2,  $d_1$ : laju kematian pada populasi 2 karena virus utama,  $d_2$ : laju kematian pada populasi 2 karena mutasi virus utama,  $S_2$ : laju penularan mutasi virus utama pada populasi 2,  $S_3$ : laju vaksinasi pada populasi 1,  $v$ : laju mutasi,  $x$ : Laju kesembuhan individu dari populasi 2 yang terinfeksi virus utama,  $\dagger$ : laju kesembuhan individu populasi 2 yang terinfeksi mutan virus utama, dan  $r$ : Laju penurunan immunitas individu populasi 2.

Ilustrasi penyebaran penyakit endemik dengan pemberian vaksin pada kelompok populasi 1 dideskripsikan sebagai berikut.



**Gambar 1:** Ilustrasi kerangka model dengan kontrol vaksin pada populasi

Model matematika untuk kasus pemberian vaksin pada populasi 1, dirumuskan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= c + S_3 S_1 - b S_1 - \check{S} S_1 I_1 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \check{S} S_1 I_1 - b I_1 - m I_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Penyebaran penyakit pada populasi 2 berasal dari individu populasi 1 yang terjangkit penyakit tersebut. Adanya interaksi individu dari populasi 2 dengan individu dari populasi 1 yang sudah terjangkit penyakit, maka model penyebaran penyakit endemik pada populasi 2 dapat diformulasikan dalam sistem persamaan diferensial berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= c + S_3 S_1 - b S_1 - \check{S} S_1 I_1 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \check{S} S_1 I_1 - b I_1 - m I_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= \dots - \sim S_2 - S_1 I_1 S_2 - S_2 I_{22} S_2 \\ \frac{dI_{21}}{dt} &= S_1 I_1 S_2 - \sim I_{21} - d_1 I_{21} - v I_{21} - x I_{21} \\ \frac{dI_{22}}{dt} &= S_2 I_{22} S_2 + v I_{21} - \sim I_{22} - d_2 I_{22} - \dagger I_{22} \\ \frac{dR}{dt} &= x I_{21} + \dagger I_{22} - \sim R \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Misalkan  $N_1(t) = S_1(t) + I_1(t)$  merupakan jumlah populasi 1, maka laju perubahan jumlah individu yaitu:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dS_1}{dt} + \frac{dI_1}{dt} = c + S_3 S_1 - b N_1 - m I_1.$$

Jika tidak terjadi endemik virus utama pada populasi 1 akan mencapai jumlah populasi

$$\text{maksimum yaitu } \hat{N}_1 = \frac{c + S_3 S_1}{b}.$$

Dari Sistem (1.2), infeksi pada individu populasi 2 dipengaruhi oleh banyak individu populasi 1 yang terinfeksi virus utama. Misalkan  $N_2(t) = S_2(t) + I_{21}(t) + I_{22}(t) + R(t)$  adalah jumlah populasi 2, maka laju

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{dS_2(t)}{dt} + \frac{dI_{21}(t)}{dt} + \frac{dI_{22}(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = \dots - \sim N_2 - d_1 I_{21} - d_2 I_{22}.$$

Untuk  $\frac{dN_2}{dt} = 0$ , diperoleh

$$\hat{N}_2 = \frac{\dots - d_1 I_{21} - d_2 I_{22}}{\sim}.$$

Jika tidak terjadi endemik virus utama dan mutasi virus utama pada populasi 2 akan

perubahan jumlah individu dinyatakan dalam persamaan:

mencapai jumlah populasi maksimum yaitu  $\hat{N}_2 = \frac{\dots}{\sim}$ . Oleh karena itu, dapat didefinisikan

domain untuk Sistem (1.2), yaitu:

$$T = \left\{ \left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) \in \mathfrak{R}_+^6 : \begin{aligned} 0 \leq \hat{S}_1 + \hat{I}_1 \leq \hat{N}_1 \leq \frac{c + S_3 S_1}{b}, \\ 0 \leq \hat{S}_2 + \hat{I}_{21} + \hat{I}_{22} + \hat{R} \leq \hat{N}_2 \leq \frac{\dots}{\sim} \end{aligned} \right\}.$$

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dengan berbagai dukungan definisi dan teorema.

## TEORI PENDUKUNG

### Definisi 1

Dalam bukunya, Perko (1991) mendefinisikan suatu sistem

$$\dot{x} = f(x)$$

Dengan  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fungsi kontinu pada  $E$ . Sistem (a) dikatakan linier jika  $f_1, f_2,$

$f_3, \dots, f_n$  masing-masing linier dalam  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dan dikatakan nonlinear jika  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  masing-masing nonlinier dalam  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . (a)

Model penyebaran penyakit di atas merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier dimensi 6. Dalam hal ini, akan

dipelajari perilaku solusi Sistem (1.1) dan (1.2) di sekitar titik ekuilibrium sistemnya. Hal tersebut dapat dilakukan melalui linierisasi di sekitar titik ekuilibrium sistem (1.1) dan (1.2). Linierisasi suatu sistem nonlinier dapat dilakukan jika titik ekuilibrium sistem tersebut merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

### Definisi 2

Titik  $\hat{x} \in \mathfrak{R}^n$  disebut titik ekuilibrium Sistem (a) jika  $f(\hat{x}) = 0$ .

### Definisi 3

Titik ekuilibrium  $\hat{x}$  disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (a) jika semua nilai eigen  $Jf(\hat{x})$ , mempunyai bagian real tak nol.

### Definisi 4

Diberikan matriks Jacobian  $Jf(\hat{x})$ , sistem  $\dot{x} = Jf(\hat{x})x$  disebut linierisasi Sistem (a) di sekitar titik  $\hat{x}$ .

Hasil linierisasi suatu sistem nonlinier, yaitu sistem linier selanjutnya akan dikaji kestabilannya (lokal) di sekitar titik

## ANALISIS MODEL DAN HASIL

Dinamika dari suatu sistem dapat dilihat melalui solusi sistem tersebut. Namun solusi suatu sistem tidak selalu mudah diperoleh, khususnya untuk sistem persamaan diferensial nonlinier. Oleh karena itu, untuk mempelajari

ekuilibrium  $\hat{x}$ . Kestabilan suatu sistem linierisasi diperoleh berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian  $Jf(\hat{x})$  (Olsder, 1994).

### Teorema 1

Diberikan  $\dot{x} = Ax$ , dengan  $A_{n \times n}$  matriks bilangan real, mempunyai nilai eigen  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k (k \leq n)$ .

a) Titik ekuilibrium  $\hat{x}$  dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika  $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

b) Jika terdapat  $i \in (1, 2, \dots, k)$  sehingga  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ , maka titik ekuilibrium  $\hat{x}$  tidak stabil.

c) Jika (i)  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

(ii) Nilai-nilai eigen  $\lambda_i$  dengan  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  bersesuaian dengan vektor eigen bebas linier yang cacahnya sama dengan multiplisitasnya dari  $\lambda_i$ .

maka titik ekuilibrium  $\hat{x}$  stabil.

dinamika suatu sistem dapat dilihat dari perilaku di sekitar titik-titik ekuilibriumnya.

### Teorema 2

Diberikan  $r_0 = \frac{cw}{(b - S_3)(b + m)}$  bilangan reproduktif dasar dari Sistem (1.1).

i) Jika  $r_0 \leq 1$ , maka Sistem (1.1) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu  $\mathbf{P}_0 =$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{c}{b-s_3}, 0 \right).$$

ii) Jika  $r_0 > 1$ , maka Sistem (1.1) mempunyai

$$\text{dua titik ekuilibrium yaitu } \mathbf{P}_0 = \left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{c}{b-s_3}, 0 \right) \text{ dan } \mathbf{P}_1 =$$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{b+m}{\tilde{S}}, \frac{c}{b+m} - \frac{b-s_3}{\tilde{S}} \right).$$

**Bukti:**

$$\text{Jika } \frac{dI_1}{dt} = 0 \text{ maka } \hat{I}_1 = 0 \text{ atau } \hat{S}_1 = \frac{b+m}{\tilde{S}}.$$

$$\text{Untuk } \hat{I}_1 = 0 \text{ dan } \frac{dS_1}{dt} = 0 \text{ diperoleh } \hat{S}_1 = \frac{c}{b}.$$

$$\text{Untuk } \hat{S}_1 = \frac{b+m}{\tilde{S}} \text{ dan } \frac{dS_1}{dt} = 0 \text{ diperoleh}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{c}{b+m} - \frac{b-s_3}{\tilde{S}}. \text{ Karena } \hat{I}_1 > 0$$

**Teorema 3**

$$\text{Misalkan } \hat{I}_1 = 0 \text{ dan } R_0 = \frac{\dots S_2}{\sim(\sim + d_2 + \dagger)}$$

bilangan reproduktif dasar karena penyebaran mutasi virus utama pada populasi 2.

i) Jika  $R_0 \leq 1$ , maka Sistem (1.2) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu  $\mathbf{E}_0 =$

$$\left( \frac{c}{b-s_3}, 0, \frac{(\sim + d_2 + \dagger)}{S_2}, 0, \left( \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger)} - \frac{\sim}{S_2} \right), \dagger \left( \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger)} - \frac{\sim}{S_2} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c\tilde{S}}{(b+m)(b-s_3)} > 1 \Leftrightarrow r_0 = \frac{c\tilde{S}}{(b+m)(b-s_3)},$$

dengan  $(b-s_3) > 0$ .

i) Jika  $r_0 \leq 1$ , maka Sistem (1.1) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu  $\mathbf{P}_0 =$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{c}{b-s_3}, 0 \right). \text{ Titik } \mathbf{P}_0$$

merupakan titik ekuilibrium non-endemik.

ii) Jika  $r_0 > 1$ , maka Sistem (1.1) mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu  $\mathbf{P}_0 =$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{c}{b-s_3}, 0 \right) \text{ dan } \mathbf{P}_1 =$$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{b+m}{\tilde{S}}, \frac{c}{b+m} - \frac{b-s_3}{\tilde{S}} \right). \text{ Titik}$$

$\mathbf{P}_1$  merepresentasikan penyebaran virus utama pada populasi 1 telah endemik, kita defenisikan sebagai titik ekuilibrium endemik.

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left( \frac{c}{b-s_3}, 0, \dots, 0, 0, 0 \right)$$

.

ii) Jika  $R_0 > 1$ , maka Sistem (1.2)

mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu

$$\mathbf{E}_0 =$$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left( \frac{c}{b-s_3}, 0, \dots, 0, 0, 0 \right)$$

$$\text{dan } \mathbf{E}_1 = \left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right)$$

**Bukti:**

Untuk  $\hat{I}_1 = 0$  dan  $\frac{dI_{21}}{dt} = 0$  diperoleh  $\hat{I}_{21} = 0$ .

Jika  $\hat{I}_1 = 0$  dan  $\frac{dI_{22}}{dt} = 0$  maka  $\hat{I}_{22} = 0$  atau

$$\hat{S}_2 = \frac{\sim + d_2 + \dagger}{S_2}. \text{ Karena } \hat{I}_{21} = 0, \hat{I}_{22} = 0,$$

dan  $\frac{dR}{dt} = 0$ , diperoleh  $\hat{R} = 0$ . Selanjutnya

$\hat{I}_1 = 0$ ,  $\hat{I}_{22} = 0$ , dan  $\frac{dS_2}{dt} = 0$  diperoleh

$$\hat{S}_2 = \frac{\dots}{\sim}. \text{ Akibatnya diperoleh titik}$$

ekuilibrium  $E_0 =$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left( \frac{c}{b - S_3}, 0, \frac{\dots}{\sim}, 0, 0, 0 \right)$$

(Titik ekuilibrium non - endemik pada populasi 2).

$$= \left( \frac{c}{b - S_3}, 0, \frac{(\sim + d_2 + \dagger)}{S_2}, 0, \left( \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger)} - \frac{\sim}{S_2} \right), \dagger \left( \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger)} - \frac{\sim}{S_2} \right) \right).$$

Titik ini didefinisikan sebagai titik ekuilibrium endemik mutasi virus utama.

Untuk  $\frac{S_2 \dots}{\sim (\sim + d_2 + \dagger)} > 1$ , didefinisikan

$$R_0 = \frac{S_2 \dots}{\sim (\sim + d_2 + \dagger)} \text{ (bilangan reproduktif}$$

dasar penyebaran mutasi virus utama pada populasi 2).

i) Untuk  $R_0 \leq 1$ , Sistem (1.2) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu  $E_0$ .

Untuk menentukan titik ekuilibrium endemik

diperoleh dari persamaan  $\frac{dI_{21}}{dt} = 0$ ,  $\frac{dS_2}{dt} = 0$

dengan  $\hat{I}_1 = 0$ . Adanya mutasi virus utama

pada populasi 2, artinya

$$\hat{I}_{22} > 0 \Leftrightarrow \hat{I}_{22} = \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger)} - \frac{\sim}{S_2} > 0.$$

Karena  $\hat{I}_{22} = \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger)} - \frac{\sim}{S_2}$ ,  $\hat{I}_{21} = 0$ , dan

$\frac{dR}{dt} = 0$ , ditemukan

$$\hat{R} = \dagger \left[ \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger)} - \frac{\sim}{S_2} \right].$$

Dengan demikian diperoleh titik ekuilibrium

$$E_1 = \left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right)$$

ii) Untuk  $R_0 > 1$ , Sistem (1.2) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu  $E_0$  dan  $E_1$ .

**Teorema 4**

Diberikan  $\hat{I}_1 = \frac{c}{b + m} - \frac{b - S_3}{\hat{S}} > 0$ ,

$$\bar{R}_0 = \frac{\dots S_2}{(\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 \right)}$$

adalah bilangan reproduktif dasar penyebaran virus utama dan mutasi virus utama dari Sistem (1.2).

Jika  $\bar{R}_0 > 1$ , maka Sistem (1.2) mempunyai tiga titik ekuilibrium yaitu  $E_0$ ,  $E_1$  dan  $E_2$ .

Titik  $E_2 = (\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R})$  merupakan

titik ekuilibrium ketiga dari Sistem (1.2),  
dengan

$$\hat{S}_1 = \frac{b+m}{\check{S}} > 0; \hat{I}_1 = \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\check{S}} > 0;$$

$$\hat{S}_2 = \frac{\dots}{\sim + p + \frac{1}{2k} \left[ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[\dots S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4S_2 k \dots \nu p}{l}} \right]} > 0;$$

$$\hat{I}_{21} = \frac{p \dots}{l \left\{ \sim + p + \frac{1}{2k} \left[ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[\dots S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4S_2 k \dots \nu p}{l}} \right] \right\}} > 0;$$

dengan  $\bar{R}_0 = \frac{\dots S_2}{k(\sim + p)} > 1;$

$$\hat{I}_{22} = \frac{1}{2S_2 k} \left[ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[\dots S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4S_2 k \dots \nu p}{l}} \right] > 0 ; \text{ dan}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\sim} \left[ \frac{x p \dots}{l \left\{ \sim + p + \frac{1}{2k} \left[ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[\dots S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4S_2 k \dots \nu p}{l}} \right] \right\}} + \frac{\dagger}{2S_2 k} \left[ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[\dots S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4S_2 k \dots \nu p}{l}} \right] \right] > 0.$$

(1.3)

**Bukti:**

Jika  $\hat{I}_1 = \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\check{S}} > 0$ ,  $\hat{S}_1 = \frac{b+m}{\check{S}}$ , dan

$$\frac{dS_2}{dt} = 0 \text{ maka diperoleh:}$$

$$S_2 = \frac{\dots}{\sim + S_1 \hat{I}_1 + S_2 \hat{I}_{22}}.$$

Untuk  $\hat{I}_1 = \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\check{S}} > 0$  dan  $\frac{dI_{21}}{dt} = 0$

diperoleh:

$$I_{21} = \frac{S_1 \hat{I}_1 \hat{S}_2}{\sim + d_1 + \nu + x}.$$

Dengan mensubstitusikan (1.4) dan  $I_{21}$  di atas ke

persamaan  $\frac{dI_{22}}{dt} = 0$ , diperoleh:

$$F(I_{22}) = S_2(\sim + d_2 + \dagger)(I_{22})^2 - \left[ \dots S_2 - (\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 \right) \right] I_{22} -$$

$$\frac{\dots \nu S_1 \hat{I}_1}{\sim + d_1 + \nu + x}.$$

(1.6)



Jika  $F(I_{22})=0$  maka persamaan (1.6) adalah persamaan kuadrat yang memiliki dua akar real dan berlainan tanda. Untuk kasus laju mutasi sangat kecil ( $0 < v \ll 1$ ), akibatnya persamaan (1.6) menjadi :

$$F(I_{22}) = S_2(\sim + d_2 + \dagger)(I_{22})^2 - \left[ \dots S_2 - (\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 \right) \right] I_{22} \quad (1.7)$$

mempunyai akar real dan tidak sama jika:

$$\dots S_2 - (\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\dots S_2}{(\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 \right)} > 1.$$

Didefenisikan  $\bar{R}_0 = \frac{\dots S_2}{(\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 \right)}$  populasi 2. Dengan demikian, akar positif dari Persamaan (1.8) adalah:

adalah bilangan reproduktif dasar penyebaran virus utama dan mutasi virus utama pada

$$I_{22_1} = \frac{1}{2S_2(\sim + d_2 + \dagger)} \left\{ \begin{array}{l} \dots S_2 - (\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\check{S}} \right) \right) \\ \left[ \dots S_2 - (\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\check{S}} \right) \right) \right]^2 + \left[ 4 \left[ \dots v S_1 S_2 \left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\check{S}} \right) \left( \frac{\sim + d_2 + \dagger}{\sim + d_1 + v + x} \right) \right] \right] \end{array} \right\}.$$

$$\text{karena } \bar{R}_0 = \frac{\dots S_2}{(\sim + d_2 + \dagger) \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 \right)} > 1.$$

Untuk memudahkan perhitungan, misalkan  $k = (\sim + d_2 + \dagger)$ ,  $l = (\sim + d_1 + v + x)$ ,

$$p = S_1 \left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\check{S}} \right).$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\hat{I}_{22_1} = \frac{1}{2S_2 k} \left\{ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{\left[ \dots S_2 - k(\sim + p) \right]^2 + \frac{4 \dots v S_2 k p}{l}} \right\} > 0$$

Dengan mensubsitusikan nilai  $\hat{I}_{22_1}$  ke Persamaan (1.4) dan (1.5) diperoleh nilai

$$\hat{S}_2 = \frac{\dots}{\sim + p + \frac{1}{2k} \left\{ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{\left[ \dots S_2 - k(\sim + p) \right]^2 + \frac{4 \dots V S_2 k p}{l}} \right\}} > 0$$

$$\hat{I}_{21} = \frac{\dots p}{l \left[ \sim + p + \frac{1}{2k} \left\{ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{\left[ \dots S_2 - k(\sim + p) \right]^2 + \frac{4 \dots V S_2 k p}{l}} \right\} \right]} > 0$$

dan

$$\hat{R} = \frac{1}{\sim} \left[ \frac{\dots p}{l \left[ \sim + p + \frac{1}{2k} \left\{ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{\left[ \dots S_2 - k(\sim + p) \right]^2 + \frac{4 \dots V S_2 k p}{l}} \right\} \right]} + \frac{\dagger}{2k S_2} \left\{ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{\left[ \dots S_2 - k(\sim + p) \right]^2 + \frac{4 \dots V S_2 k p}{l}} \right\} \right] > 0.$$

Dengan demikian diperoleh titik ekuilibrium  $E_2$  yang disajikan pada persamaan (1.3). Titik ekuilibrium  $E_2$  ini didefinisikan sebagai titik ekuilibrium endemik virus utama dan mutasinya.

Untuk menyelidiki kestabilan titik-titik ekuilibrium Sistem (1.1), akan digunakan teknik linierisasi. Matriks Jacobian Sistem (1.1) di titik  $(\hat{S}_1, \hat{I}_1)$  adalah:

$$J(\hat{S}_1, \hat{I}_1) = \begin{bmatrix} S_3 - b - \check{S} \hat{I}_1 & \check{S} \hat{S}_1 \\ \check{S} \hat{I}_1 & \check{S} \hat{S}_1 - (b + m) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

### Teorema 5

Diberikan  $r_0 = \frac{cw}{(b - S_3)(b + m)}$ , dan titik-titik

ekuilibrium dari Sistem (1.1) yaitu  $P_0 =$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{c}{b - S_3}, 0 \right) \quad \text{dan} \quad P_1 =$$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left( \frac{b + m}{\check{S}}, \frac{c}{b + m} - \frac{b - S_3}{\check{S}} \right).$$

i) Jika  $r_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal.

ii) Jika  $r_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil (titik saddle).

iii) Jika  $r_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium  $P_1$  stabil asimtotik lokal.

### Bukti:

Persamaan karakteristik matriks Jacobian titik  $P_0$ , yaitu  $|I - J(P_0)| = 0$  sedemikian sehingga

$$\begin{vmatrix} (} + b - S_3) & \frac{\check{S}c}{b - S_3} \\ 0 & (} + (b + m) - \frac{\check{S}c}{b - S_3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (} + b - S_3) \left( (} + (b + m) - \frac{\check{S}c}{b - S_3} \right) = 0.$$

i) Untuk  $r_0 < 1$ , maka  $\lambda_1 = s_3 - b < 0$  dan

$$\lambda_2 = \frac{\check{S}c}{b - s_3} - (b + m) < 0, \text{ berdasarkan}$$

Teorema 1 maka titik  $P_0$  stabil asimotik lokal.

ii) Untuk  $r_0 > 1$ , maka  $\lambda_1 = s_3 - b < 0$  dan

$$\lambda_2 = \frac{\check{S}c}{b - s_3} - (b + m) > 0, \text{ berdasarkan}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{\check{S}c}{b+m} & -(b+m) \\ (b-s_3) - \frac{\check{S}c}{b+m} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{\check{S}c}{b+m}\lambda + (b+m)(b-s_3) - \check{S}c = 0 \quad (1.9)$$

iii) Untuk melihat nilai  $\lambda_{1,2}$ , diselidiki dari

$$\text{nilai } \left( \frac{\check{S}c}{b+m} \right)^2 - 4(b+m)(b-s_3), \text{ artinya}$$

terdapat tiga kemungkinan yaitu:

- Titik  $P_1$  stabil asimtotik lokal.
- Titik  $P_1$  tidak stabil (titik *saddle*).
- Titik  $P_1$  adalah stabil asimtotik karena bagian real dari  $\lambda_{1,2} < 0$ .

### Teorema 6

Diberikan  $R_0 = \frac{\dots S_2}{\sim(\sim + d_2 + \dagger)}$  dan titik ekuilibrium bebas penyakit dari Sistem (1.2)

$$[\lambda - (s_3 - b)] \cdot \left[ \lambda + (b + m) - \frac{\check{S}c}{b - s_3} \right] \cdot [\lambda + \sim]^2 \cdot [\lambda + l] \cdot \left[ \lambda + k - \frac{S_2 \dots}{\sim} \right] = 0 \quad (1.10)$$

- Untuk  $R_0 < 1$ , titik ekuilibrium  $E_0$  adalah titik stabil asimtotik lokal
- Untuk  $R_0 > 1$ , titik ekuilibrium  $E_0$  tidak stabil (titik *saddle*).

Teorema 1 maka titik  $P_0$  tidak stabil (titik *saddle*).

Persamaan karakteristiknya matrik Jacobian untuk titik  $P_1$ , yaitu  $|\lambda I - J(P_1)| = 0$ , berlaku:

$$\text{yaitu } E_0 = \left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left( \frac{c}{b - s_3}, 0, \dots, 0, 0, 0 \right).$$

- Jika  $R_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium  $E_0$  stabil asimtotik lokal.
- Jika  $R_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium  $E_0$  tidak stabil (titik *saddle*).

### Bukti:

Nilai eigen dari matriks Jacobian  $E_0$  ditentukan melalui persamaan karakteristik matrik Jacobian pada titik  $E_0$ , yaitu  $|\lambda I - J(E_0)| = 0$ .

**Teorema 7**

Jika  $\bar{R}_0 = \frac{\dots S_2}{(\sim + d_2 + \dagger)(\sim + S_1 \hat{I}_1)} > 1$  maka,

titik endemik  $E_2$  pada persamaan (1.5)

adalah titik stabil asimtotik lokal.

**Bukti:**

Matriks Jacobian dari Sistem (1.2) pada titik  $E_2$  adalah:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} S_3 - b - \check{S} \hat{I}_1 & -\check{S} \hat{S}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \check{S} \hat{I}_1 & \check{S} \hat{S}_1 - (b+m) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_1 \hat{S}_2 & -S_1 \hat{I}_1 - S_2 \hat{I}_{22} & 0 & -S_2 \hat{S}_2 & 0 \\ 0 & S_1 \hat{S}_2 & S_1 \hat{I}_1 & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 \hat{I}_{22} & v & S_2 \hat{S}_2 - k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \dagger & - \end{bmatrix}$$

Nilai  $\hat{I}_1, \hat{I}_{22}, \hat{S}_1$  dan  $\hat{S}_2$  yang disajikan pada persamaan (1.3) disubstitusikan ke matriks Jacobian di atas. Sebelum dilanjutkan pembahasan tentang matriks di atas, dimisalkan:

$$q = \left( \sim + S_1 \hat{I}_1 + S_2 \hat{I}_{22} \right)$$

$$= \left( \sim + p + \frac{1}{2k} \left[ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[\dots S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4 \dots S_2 k v p}{l}} \right] \right) > 0$$

$$y = \left( k - \frac{S_2 \dots}{\sim + p + \frac{1}{2k} \left[ \dots S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[\dots S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4 \dots S_2 k v p}{l}} \right]} \right)$$

$$\text{dengan } \bar{R}_0 = \frac{\dots S_2}{(\sim + d_2 + \dagger)(\sim + S_1 \hat{I}_1)} > 1.$$

Nilai eigen matriks Jacobian pada titik  $E_2$  dari Sistem (1.2) ditentukan melalui persamaan karakteristik matriks Jacobian pada titik tersebut, yaitu  $\det(I - J(E_2)) = 0$ .

$$\Leftrightarrow \left( \} + \frac{\check{S}c}{b+m} \right) (\} ) (\} + \sim) \left[ \left( (\} + q)(\} + l)(\} + y) + \left( v p S_2 \hat{S}_2 \right) + (S_2)^2 \hat{S}_2 \cdot \hat{I}_{22} (\} + l) \right] -$$

$$(b(b+m) - \check{S}c) (\} + \sim) \left[ \left( (\} + q)(\} + l)(\} + y) + \left( v p S_2 \hat{S}_2 \right) + (S_2)^2 \hat{S}_2 \cdot \hat{I}_{22} (\} + l) \right] = 0. \quad (1.11)$$

Dengan memisalkan

$$z = \nu p S_2 \hat{S}_2$$

$$= \frac{\nu p S_2}{\sim + p + \frac{1}{2k} \left[ p S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[p S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4 \dots S_2 k \nu p}{l}} \right]} > 0, \text{ dan}$$

$$v = (S_2)^2 \hat{I}_{22} \hat{S}_2$$

$$= \frac{\frac{p S_2}{2k} \left[ p S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[p S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4 \dots S_2 k \nu p}{l}} \right]}{\sim + p + \frac{1}{2k} \left[ p S_2 - k(\sim + p) + \sqrt{[p S_2 - k(\sim + p)]^2 + \frac{4 \dots S_2 k \nu p}{l}} \right]} > 0$$

mengakibatkan persamaan (1.11) berubah menjadi

$$[\} + \sim \left[ \}^2 + \frac{\check{S}c}{b+m} \} - (b(b+m) - \check{S}c) \right] \left[ \}^3 + (l+q+y)\}^2 + (lq+ly+qy+v)\} + z + lv + lqy \right] = 0$$

Misalkan  $f(\}) = \}^2 + \frac{\check{S}c}{b+m} \} - (b(b+m) - \check{S}c)$  dan

$$g(\}) = \}^3 + (l+q+y)\}^2 + (lq+qy+ly+v)\} + z + lv + lqy.$$

Dengan demikian persamaan karakteristik di atas berubah menjadi:

$$(\} + \sim).f(\}).g(\}) = 0 \tag{1.12}$$

i) Dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz persamaan

$$f(\}) = \}^2 + \frac{\check{S}c}{b+m} \} - (b(b+m) - \check{S}c)$$

memiliki bagian real negatif sehingga nilai  $\}_1 < 0$  dan  $\}_2 < 0$ .

ii) Dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz, persamaan

$$g(\}) = \}^3 + (l+q+y)\}^2 + (lq+qy+ly+v)\} + z + lv$$

, nilai  $\}$  negatif karena koefisien fungsi

$g(\})$  semua bernilai positif, akibatnya

$$\}_1 < 0, \}_2 < 0 \text{ dan } \}_3 < 0.$$

iii) Untuk  $(\} + \sim) = 0$  diperoleh  $\} = -\sim < 0$ .

Jadi, dari i, ii, dan iii, disimpulkan bahwa persamaan karakteristik matriks Jacobian pada titik  $E_2$  mempunyai nilai eigen negatif. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 1 titik  $E_2$  adalah titik stabil asimtotik lokal.

### Teorema 8

Jika  $R_0 = \frac{\dots S_2}{\sim(\sim + d_2 + \dagger)} > 1$  maka, titik

ekuilibrium endemik  $E_1 =$

$$\left( \hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left( \frac{c}{b-S_3}, 0, \frac{(\sim + d_2 + \dagger)}{S_2}, 0, \left( \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger) - S_2} - \frac{\sim}{S_2} \right), \dagger \left( \frac{\dots}{(\sim + d_2 + \dagger) - S_2} - \frac{\sim}{S_2} \right) \right)$$

*stabil asimtotik lokal.*

**Bukti:**

Nilai eigen dari matriks  $J(E_1)$ , ditentukan melalui persamaan karakteristiknya  $|I - J(E_1)| = 0$ .

$$\left( \lambda - (b - S_3) \right) \left( \lambda - \left[ \frac{\tilde{S}c}{b - S_3} - (b + m) \right] \right) (\lambda + l) (\lambda + r) \left( \lambda^2 + \frac{\dots S_2}{k} \lambda + (\dots S_2 - \dots k) \right) = 0.$$

Dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen dari persamaan karakteristik adalah bernilai negatif. Jadi dari

berdasarkan Teorema 1 dan pembahasan bagian i, ii, iii, iv, dan v disimpulkan bahwa titik  $E_1$  stabil asimtotik lokal.

**KESIMPULAN DAN SARAN**

Penyebaran virus utama pada populasi 1 dan 2 menjadi fokus pada tulisan ini, meskipun faktor atau parameter penentu endemik hanya dikaji secara matematis. Pada populasi 1, nilai

parameter  $\left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\tilde{S}} \right) > 0$  menandakan

adanya endemik virus utama. Untuk tindakan pencegahan penyebaran virus utama,

diharapkan nilai  $\left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\tilde{S}} \right)$  sangat

kecil. Supaya nilai  $\left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\tilde{S}} \right)$  semakin

kecil dipengaruhi  $S_3$  (laju vaksinasi pada populasi 1),  $S$  (lajukontak individu yang

rentan dengan yang terinfeksi). Jika semakin

kecil nilai parameter  $S$  dan semakin besar

nilai parameter  $S_3$ , maka nilai

$\left( \frac{c}{b+m} - \frac{b-S_3}{\tilde{S}} \right)$  akan konvergen ke 0. Oleh

karena itu, dari hasil penelitian ini,

direkomendasikan pada pengambil kebijakan

untuk memperhatikan hal-hal yang

menjadikan parameter  $S$  semakin kecil. Jika terjadi endemik virus utama pada populasi 1, maka jumlah populasi akan konvergen ke nilai  $\frac{b+m}{\tilde{S}}$ .

Pada populasi 2 tidak akan terjadi endemik

virus utama maupun mutasinya jika tidak ada

interaksi dengan populasi 1. Oleh karena itu,

nilai parameter  $S_1$  harus diminimumkan

dengan berbagai langkah-langkah preventif.

Titik  $E_1$  dengan  $R_0 > 1$  menyatakan bahwa

penyebaran virus utama terdapat pada

populasi. Demikian halnya Titik  $E_2$  dengan

$\bar{R}_0 > 1$  menyatakan adanya penyebaran

endemik mutasi virus utama. Sebagai

tindakan preventif atas bahaya suatu virus

mengacu pada bilangan reproduktif dasar

( $R_0$ ). Dalam penelitian ini, kasus wabah

mutasi virus utama, jika selisih rasio

rekrutmen total terhadap total laju dengan

rasio laju kematian alami terhadap laju kontak

individu rentan dengan individu yang sakit lebih besar dari satu, maka perlu dilakukan tindakan preventif pada populasi tersebut. Untuk kasus wabah virus utama dan mutasinya, jika rasio parameter yang terkait

dengan bilangan reproduktif dasar  $\left(\bar{R}_0\right)$  lebih besar dari satu, maka pada populasi 1 dan 2 harus dilakukan tindakan preventif.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D.K., Place, C.M., 1992. *Dynamical System: Differential Equatio, Maps and Chaotic Behaviour*, Chapman and Hall, London.
- Derouich, M and Boutayeb, A., 2008. *An Avian Mathematical Model, Applied Mathematical Sciences, Vol 2, 2008, No. 36, 1749-1760.*
- Handoko, D., Sariwati, E., 2007. *Modul4 Depkes R.I: Penyelidikan Efidemiologi Kasus Flu Burung Terintegrasi.*
- Hutapea Tri Andri, Kusumo Fajar Adi. *Penyebaran Virus Avian Influenza dengan Model SI – SIIR, Majalah Berkala MIPA UGM Volume 19 Januari 2009.*
- Iwami, S., Takeuchi, Y., Liu, X., 2009. *Avian Flu Pandemic: Can We Prevent it? Journal of Theoretical Biology 257, 181-190. Journal home page:www.elsevier.com/locate/yjtbi.*
- Jung, E., Takeuchi, Y., Jo.T.C., 2009. *Optimal Control Strategy for Prevention of Avian Influenza Pandemic. Journal of Theoretical Biology 260, 220-229. Journal home page:www.elsevier.com/locate/yjtbi.*
- Jordan, D.W., and Smith, P., 2002. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press.
- Kartono, M., *Flu Burung Adapted from www.Influenza Report.com. By Kamps, B. S., Hoffmann, C.*
- Kocak, H dan Hole, J.K., 1991. *Dynamic and Bifurcation*, Springer-Verlag, New-York.
- Khalil, H.K., 1996. *Nonlinear System, Thrid Edition*, Printice Hall, USA.
- Luenberger, G.D., 1979. *Introduction to Dynamic Systems Theory, Models and Applications*, John Wilwy & Sons, New York.
- Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*, Delftse Uitgevers Maatschappij, Netherlands.
- Perko, L., 1991. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New-york.
- Soejoedono, R.D. dan Handayani E., 2006. *Flu Burung*, Penebar swadaya, Jakarta.
- Tallis, G., Septiawati, C., 2007. *Modul 2 Depkes R.I : Dasar-Dasar Flu Burung, Pandemi dan Fase-Fase Pandemi Influenza Menurut WHO.*
- Verhulst, F., 1990. *Nonlinear Differential Equation and Dyanimacal Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.