TRAJEKTORI PERSAMAAN KUADRATIK DUA VARIABEL

Lasker P. Sinaga

Jurusan Matematika, FMIPA Unimed. Email: lazer_integral@yahoo.com

ABSTRAK

Trajektori suatu kurva merupakan salah satu aplikasi persamaan differensial orde pertama. Gradien sebagai turunan pertama suatu fungsi menjadi dasar untuk mendapatkan persamaan differensial trajektori suatu kurva. Dengan memanfaatkan persamaan differensial linear tidak homogen, trajektori rumpun kurva dari persamaan kuadratik dua variabel dapat ditunjukkan.

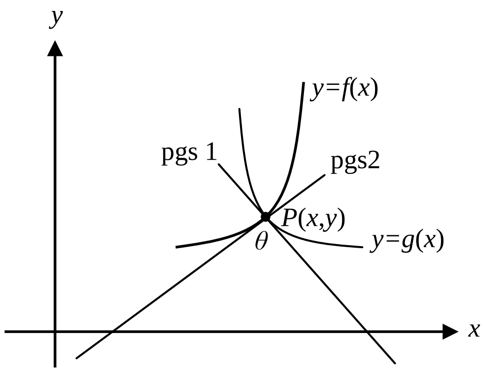
Kata kunci: *Trajektori, Irisan Kerucut, Persamaan Differensial, Kuadratik*

PENDAHULUAN

Persamaan differensial linear orde pertama merupakan salah satu bentuk persamaan differensial yang sangat aplikatif diberbagai bidang. Persamaan ini berbentuk $y' + p(x)y = q(x)$ dengan solusi $y = e^{-\int P(x)dx} \int q(x) e^{\int P(x)dx} dx$. Koleksi penyelesaian persamaan differensial linear orde pertama disebut dengan keluarga kurva atau rumpun kurva.

Suatu kurva yang melalui rumpun kurva dari arah sebaliknya sehingga garis singgung masing-masing kurva membntuk sudut tetap θ dinamakan trajektori θ dari rumpun kurva tersebut. Integral kurva dari persamaan differensial $f(x, y, \frac{y' - \tan\theta}{1 + y' \tan\theta}) = 0$ merupakan trajektori isogonal dari integral kurva $f(x, y, y') = 0$. Untuk sudut $\theta = 90^o$ maka persamaan $f(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$ adalah trajektori ortogonal dari rumpun kurva $f(x, y, y') = 0$.

Perhatikan gambar!



Keterangan gambar:

Garis pgs 2 menyinggung $y = f(x)$ di P

Garis pgs 1 menyinggung $y = g(x)$ di P

pgs 1 dan pgs 2 membentuk sudut θ

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dengan berbagai dukungan definisi dan teorema serta teknis/praktis proses persamaan differensial linear. Rumpun kurva dan trajektori disketsa dengan menggunakan Program Maple.

PEMBAHASAN DAN HASIL

Persamaan kuadratik dua variabel dituliskan secara umum dengan:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*bilangan real

Jika diperhatikan nilai *A*, *B*, *C* dengan minimal satu diantaranya tidak bernilai nol maka terbentuk kurva sederhana seperti lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola. Kurva-kurva ini lebih sering disebut dengan irisan kerucut (*Conic Section*).

Persamaan rumpun kurva adalah:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Persamaan differensial rumpun kurva adalah:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + Cy + D}{2By + Cx + E}$$

Trajektori ortogonal persamaan differensial tersebut adalahpersamaan differensial linear tidak homogen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2By + Cx + E}{2Ax + Cy + D}$$

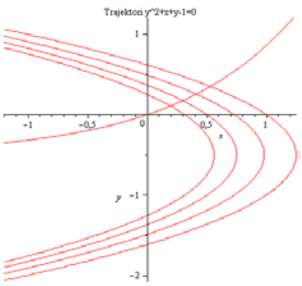
Dengan mengingat syarat minimal satu nilai diantara *A*, *B*, *C* tidak nol maka persamaan ini kita kaji berdasarkan nilai $C = 0$ atau $C \neq 0$.

I. Untuk $C=0$ maka persamaan differensial menjadi:

$$\frac{dy}{2By+E}=\frac{dx}{2Ax+D}$$

Berdasarkan klasifikasi kurva oleh irisan kerucut maka diperoleh:

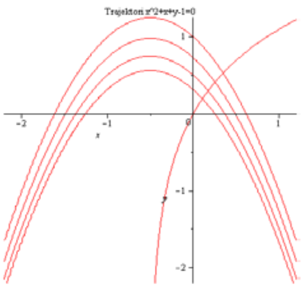
a. Jika $A=0$ dan $B\neq 0$, kurva berbentuk parabola.



Persamaan differensial trajektori berbentuk $\frac{Ddy}{2By+E}=dx$ sehingga diperoleh solusi:

$$y=\frac{1}{2B}(e^{\frac{2B}{D}x}-E).$$

b. Jika $A\neq 0$ dan $B=0$, kurva berbentuk parabola.

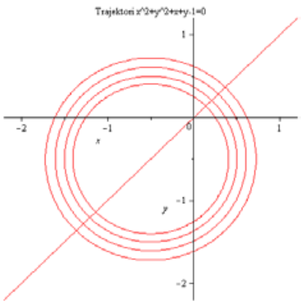


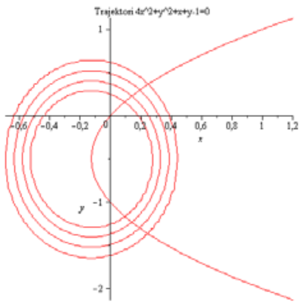
Persamaan differensial trajektori berbentuk $\frac{dy}{E}=\frac{dx}{2Ax+D}$ sehingga diperoleh solusi:

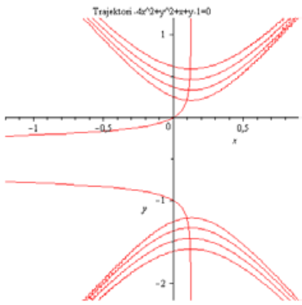
$$x=\frac{1}{2A}(e^{\frac{2A}{E}y}-D).$$

c. Jika $A=Bk$ kurva berbentuk lingkaran untuk $k=1$, berbentuk elips untuk $k>0$, $k\neq 1$, dan berbentuk hiperbola untuk $k<0$.

Persamaan differensial trajektori berbentuk $\frac{dy}{2By+E}=\frac{dx}{2Ax+D}$ sehingga diperoleh solusi $x=\frac{(2By+E)^k-D}{2A}$.







II. Untuk $C\neq 0$ maka persamaan differensial menjadi:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Cx+2By+E}{2Ax+Cy+D}$$

Persamaan differensial diselesaikan dengan melakukan reduksi persamaan, sebagai berikut:

Tabel 1. Reduksi Persamaan Differensial Linear Orde satu

Kasus	Perbandingan Koefisien	Reduksi
1	$\frac{2A}{C}=\frac{C}{2B}=\frac{D}{E}=\lambda$	$u=2Ax+Cy+D$ $\lambda u=Cx+2By+E$
2	$\frac{2A}{C}=\frac{C}{2B}=\lambda$ dan $\lambda\neq\frac{D}{E}$.	$u=2Ax+Cy$ $\lambda u=Cx+2By$
3	$\frac{2A}{C}\neq\frac{C}{2B}$	$u=2Ax+Cy+D$ $v=Cx+2By+E$

Dengan demikian, persamaan differensial trajektori diselesaikan sebagai berikut: Misalkan $u=2Ax+Cy+D$ dan $v=Cx+2By+E$ sehingga diperoleh persamaan differensial linear tereduksi $(2Au+Cv)dv=(2Bv+Cu)du$. Persamaan ini merupakan persamaan differensial linear homogen derajat satu sehingga dapat diselesaikan kembali dengan mereduksi melalui $u=vw$ dan $du=vdw+wdv$. Solusi persamaan tersebut berbentuk:

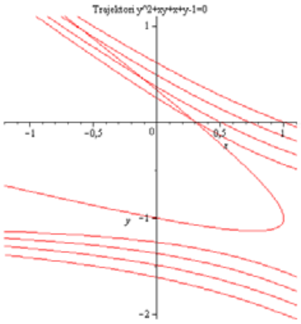
$$-\int\frac{dv}{v}=\int\frac{Cw+2B}{Cw^2+2(B-A)w-C}dw$$

Solusi yang dihasilkan secara implisit adalah:

$$\left(\frac{Cu^2+2(B-A)uv-Cv^2}{v}\right)\left(\frac{Cu+(B-A-\sqrt{(B-A)^2+C^2})v}{C\sqrt{u^2+2(\frac{B-A}{C})uv-v^2}}\right)^{\frac{2A}{\sqrt{(B-A)^2+C^2}}}=1$$

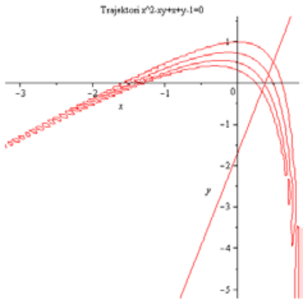
Berdasarkan klasifikasi kurva pada irisan kerucut, diperoleh:

d. Jika $A=0$ dan $B\neq0$, kurva berbentuk parabola.



Persamaan differensial trajektorinya berbentuk $\frac{dy}{dx}=\frac{Cx+2By+E}{Cy+D}$ sehingga diperoleh solusi $Cu^2+2Buv-Cv^2=v$.

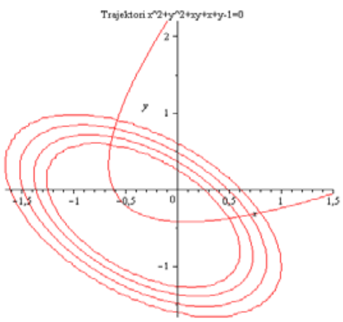
e. Jika $A \neq 0$ dan $B = 0$, kurva berbentuk parabola.

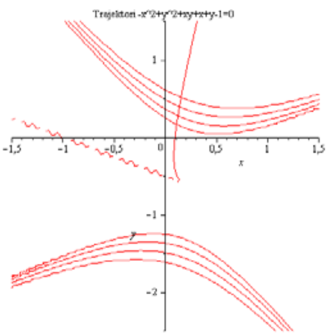


Persamaan differensial trajektorinya berbentuk $\frac{dy}{dx} = \frac{Cx+E}{2Ax+Cy+D}$ sehingga diperoleh solusi:

$$\left(\frac{Cu^2-2Auv-Cv^2}{v}\right)\left(\frac{Cu-(A+\sqrt{A^2+C^2})v}{C\sqrt{u^2-\frac{2A}{C}uv-v^2}}\right)^{\frac{2A}{\sqrt{A^2+C^2}}} = 1$$

f. Jika $A = Bk$, kurva berbentuk elips untuk $k > 0$ dan berbentuk hiperbola untuk $k < 0$. Perhatikan gambar!





KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan:

Persamaan differensial linear orde satu digunakan untuk menemukan suatu kurva yang memotong tegak lurus (ortogonal) rumpun kurva lainnya. Persamaan kuadratik dua variabel membentuk kurva sederhana yang disebut dengan irisan kerucut dan mempunyai trajektori yang berbeda berdasarkan nilai-nilai koefisien dari variabel pada persamaannya. Persamaan differensial linear orde satu homogen dan non homogen berperan dalam proses penemuan trajektorinya.

Saran:

Penelitian ini dapat dilanjutkan ke bentuk persamaan kuadratik tiga variabel.

DAFTAR PUSTAKA

Abell M. L. dan Braselton J. P., 2014, Introductory Differential Equations, fourth edition, Elsevier, Inc, USA

Bartle R. G., 1976, The Element of Real Analysis, Jhon Wiley & Sons Inc, Canada.

Brown A. L. dan Page A., 1970, Element of Functional Analysis, Van Nostrand Reinhold Company, London.

Edwards C. H., dan Penney D. E., 2008, Elementary Differential Equations, Pearson education, Inc, Upper saddle River, New Jersey.

Simmons G. F., dan Krantz S. G., 2007, Differential Equations: theory, technique, and practice, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

Tenenbaum M., dan Pollard H., 1963, Ordinary Differential Equations, Harver & Row Publishers, Inc, New York.

Tikhonov N., Vasil'eva A. B., dan Sveshnikov A. B., 1985, Differential Equations, Verlag New York, Inc, New York.