

PENERAPAN SIFAT-SIFAT GRUP PENJUMLAHAN MODULO 12 DAN 24 PADA JAM

Elvri Teresia br Sembiring

Abstrak

Makalah ini membahas mengenai penerapan sifat-sifat grup penjumlahan modulo 12 (Z_{12}) dan modulo 24 (Z_{24}). Penerapan sifat-sifat grup penjumlahan modulo 12 (Z_{12}) terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif karena untuk setiap z_1, z_2 anggota Z_{12} berlaku $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. Atau, kalau dilihat dari diagonal utamanya, maka bilangan-bilangan dalam tabel letaknya simetris terhadap diagonal utamanya. Modulo 12 (Z_{12}) terhadap operasi penjumlahan juga merupakan grup siklik dengan elemen pembangkitnya adalah 1, 5, 7, 11. Penerapan sifat-sifat grup penjumlahan modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif karena untuk setiap z_1, z_2 anggota Z_{24} berlaku $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. Atau, kalau dilihat dari diagonal utamanya, maka bilangan-bilangan dalam tabel letaknya simetris terhadap diagonal utamanya. Modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan juga merupakan grup siklik dengan elemen pembangkitnya adalah 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23

Kata Kunci : *Sifat-sifat grup penjumlahan Z_{12} dan Z_{24} , grup siklik*

PENDAHULUAN

Jika diperhatikan setiap jam yang ada yaitu jam yang berbentuk analog maka akan didapati bahwa terdapat dua belas angka yaitu angka 1, 2, 3, 4, 5,12. Dua belas angka menunjukkan waktu yang didapati pada setiap keadaan tertentu. Jika jam analog dikonversikan menjadi sistem 24 jam, maka ketika jam menunjukkan angka 12 pada siang hari, maka jam tersebut menunjukkan pukul 12.00, setelah itu maka pasti jarum jam akan berputar menunjukkan angka 1. Angka 1 dalam hal ini menunjukkan bahwa

dengan sistem 24 jam, maka angka 1 tersebut menunjukkan pukul 13.00 yang artinya keadaan itu terjadi pada jam 1 sore. Perputaran jarum jam ini akan berlanjut secara terus menerus sampai akhirnya jarum jam tersebut menunjuk angka 12. Angka 12 dalam hal ini menunjukkan bahwa dengan sistem 24 jam, maka angka 12 tersebut menunjukkan pukul 24.00 dan sama artinya dengan pukul 00.00 yang artinya keadaan itu terjadi pada jam 12 malam. Jika diperhatikan jam digital maka dapat diperoleh sistem 12 jam atau sistem 24 jam. Jika digunakan sistem 12 jam maka tidak

ada persoalan tentang penentuan jam. Sistem 12 jam terdiri dari 12 angka dengan angka 12 diganti dengan angka 0. Keseluruhan angka-angka yang tersedia adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... 11.

Dalam sistem 24 jam, jam digital hampir sama dengan jam analog, hanya saja angka-angka yang tersedia pada jam digital terdiri dari 24 angka, yang diantaranya adalah angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... 23. Pada tulisan ini, akan dibahas mengenai penggunaan jam dengan sistem 12 jam dan sistem 24 jam yang disajikan dengan menerapkan sifat-sifat grup penjumlahan modulo 12 dan modulo 24.

PEMBAHASAN

Modulo 12

Jam yang sering dipakai dalam kehidupan keseharian dapat juga menggunakan modulo 12 dengan pembagian jenis waktu a.m (pukul 00.00 – 12.00) dan p.m (pukul 12.00 – 00.00). Bilangan yang digunakan dalam modulo 12 adalah 0 sampai 11 yaitu $Z_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Satu hal yang tidak boleh dilupakan adalah penggunaan satuan waktu menit dan detik dimana 1 jam = 60 menit dan 1 menit = 60 detik. Jadi bilangan yang dipakai dapat dituliskan dari 00.00 sampai 11.59 Perhatikan tabel cayley di bawah ini:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dengan melihat tabel cayley di atas maka modulo 12(Z_{12}) terhadap operasi penjumlahan memenuhi sifat

tertutup, memiliki elemen identitas yakni 0 (atau 00.00) dan setiap elemen mempunyai invers,

sedangkan sifat asosiatif diadopsi dari sifat asosiatif bilangan bulat sehingga modulo $12(Z_{12})$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi keempat aksioma grup maka modulo $12(Z_{12})$ terhadap operasi penjumlahan membentuk grup.

Jika dikaji lebih jauh ternyata modulo $12 (Z_{12})$ terhadap operasi penjumlahan merupakan grup

komutatif karena untuk setiap z_1, z_2 anggota Z_{12} berlaku $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. Atau, kalau dilihat dari diagonal utamanya, maka bilangan-bilangan dalam tabel letaknya simetris terhadap diagonal utamanya. Modulo $12(Z_{12})$ terhadap operasi penjumlahan juga merupakan grup siklik dengan elemen pembangkitnya adalah 1, 5, 7, 11

Catatan:

1. Jika bilangan yang menunjukkan jam dibagi 12 hasil baginya ganjil maka jenis waktu berubah yakni dari a.m menjadi p.m dan sebaliknya. Jika hasil baginya genap maka jenis waktu tetap.
2. Untuk Menghitung bilangan yang besar digunakan sifat perkalian modulo, yaitu :

$$a \equiv p \pmod{12}$$

$$b \equiv q \pmod{12}$$

$$\text{maka } ab \equiv pq \pmod{12}$$

Bukti :

$$a \equiv p \pmod{12}$$

$$b \equiv q \pmod{12}$$

$$\text{maka } a - p \equiv 12m \Rightarrow a \equiv 12m + p$$

$$b - q \equiv 12n \Rightarrow b \equiv 12n + q$$

$$\text{sehingga } a \cdot b \equiv (12m + p)(12n + q)$$

$$\equiv 12(12mn) + 12mq + 12np + pq$$

$$ab - pq \equiv 12(12mn + mq + np)$$

$$\therefore ab \equiv pq \pmod{12}$$

Contoh :

1. Jika sekarang pukul 09.00 (a.m), maka pukul berapa 25000 jam kemudian ?

Penyelesaian :

$$25000 \equiv n \pmod{12}$$

$$25000 = 25 \times 25 \times 40$$

$$25 \equiv 1 \pmod{12}$$

$$40 \equiv 4 \pmod{12}$$

sehingga

$$25000 \equiv 1 \times 1 \times 4 \pmod{12}$$

$$\equiv 4 \pmod{12}$$

jadi $9 + 4 = 13 \equiv 1 \pmod{12}$ karena hasil bagi bulat $13 : 12 = 1$ (ganjil) maka jenis waktu berubah.

Jadi jika sekarang pukul 09.00 maka 25000 jam kemudian pukul 01.00 (p.m)

2. Jika sekarang pukul 05.30 a.m, pukul berapakah 14 jam kemudian ?

Penyelesaian :

$$5 + 14 = 19$$

$$\equiv 7 \pmod{12}.$$

Hasil bagi bulat $19 : 12$ adalah 1 (ganjil)

\therefore jika sekarang pukul 05.30 a.m maka 14 jam kemudian pukul 07.30 p.m

3. Jika sekarang pukul 10.30 p.m, pukul berapakah 20 jam 45 menit kemudian ?

Penyelesaian :

$$10.30 + 20.45 = 30.75$$

$$= 31.15$$

$$\equiv 7 \pmod{12}$$

Hasil bagi bulat $31 : 12 = 2$ (genap)

\therefore jika sekarang pukul 10.30 p.m maka 20 jam 45 menit kemudian adalah pukul 07.15 p.m.

4. Seorang pengeliling Indonesia berangkat dari Bandung pada hari Minggu 11 April 2004 pukul 06.00. a.m. Setelah melakukan perjalanan (termasuk istirahat) selama 70 jam 12 menit ia memasuki kota Semarang. Pada pukul berapa dan hari apa ia memasuki kota Semarang ?

Penyelesaian :

Hasil bagi bulat $70 : 12 = 5$ (ganjil)

$$06.00 + 70.12 = 76.12 \equiv 04.12 \text{ p.m}$$

untuk melihat banyaknya hari yang dilalui kita cari hasil bagi bulat dari $5 : 2$ yaitu 2. Jadi 2 hari kemudian tiba di Semarang.

∴ Pengeliling tiba di Semarang pada hari Selasa 13 April 2004 pukul 04.12 p.m.

Modulo 24

Dalam kehidupan sehari-hari sering digunakan hitungan jam yang dimulai dari jam 00.01 sampai jam 24.00, hal ini didasarkan pada perhitungan waktu 1 hari yang terdiri dari 24 jam. Karena itu Alat penunjuk waktu (jam) dapat direalisasikan kedalam residu modulo 24. Bilangan yang digunakan dalam modulo 24 adalah 0 sampai 23 yaitu $Z_{24} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 23\}$.

Satu hal yang tidak boleh dilupakan adalah penggunaan satuan waktu menit dan detik dimana 1 jam = 60 menit dan 1 menit = 60 detik. Jadi bilangan yang dipakai dapat dituliskan dari 00.00 sampai 23.59. Dalam tulisan ini yang diperhatikan adalah bilangan yang menunjukkan jam dan bukan bilangan yang menunjukkan menit dan detik

Perhatikan tabel cayley di bawah ini:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

19	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
23	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Dengan melihat tabel Cayley di atas maka modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan memenuhi sifat tertutup, memiliki elemen identitas yakni 0 (atau 00.00) dan setiap elemen mempunyai invers, sedangkan sifat asosiatif diadopsi dari sifat asosiatif bilangan bulat sehingga modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan memenuhi keempat aksioma grup maka modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan membentuk grup.

Catatan :

Untuk menghitung bilangan besar yang bukan bilangan prima digunakan teorema perkalian modulo, yaitu :

$$\begin{aligned} &\text{Jika } a \equiv p \pmod{24} \text{ dan } b \equiv q \pmod{24} \\ &\text{maka } ab \equiv pq \pmod{24} \end{aligned}$$

Bukti :

$$a \equiv p \pmod{24}$$

$$b \equiv q \pmod{24}$$

$$\text{maka } a - p \equiv 24 m \Rightarrow a \equiv 24 m + p$$

$$b - q \equiv 24 n \Rightarrow b \equiv 24 n + q$$

$$\text{sehingga } a \cdot b \equiv (24 m + p)(24 n + q)$$

$$\equiv 24(24 mn) + 24 mq + 24 np + pq$$

$$ab - pq \equiv 24(24 mn + mq + np)$$

$$\therefore ab \equiv pq \pmod{24}$$

Jika dikaji lebih jauh ternyata modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif karena untuk setiap z_1, z_2 anggota Z_{24} berlaku $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. Atau, kalau dilihat dari diagonal utamanya, maka bilangan-bilangan dalam tabel letaknya simetris terhadap diagonal utamanya. Modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan juga merupakan grup siklik dengan elemen pembangkitnya adalah 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23

Contoh

1. Jika sekarang pukul 10.00, maka pukul berapa 10000 jam kemudian ?

Penyelesaian :

$$10000 \equiv n \pmod{24}$$

$$10000 = 100 \times 100$$

$$100 \equiv 4 \pmod{24}$$

sehingga

$$10000 \equiv 4 \cdot 4 \pmod{24}$$

$$\equiv 16 \pmod{24}$$

$$\text{jadi } 10 + 16 = 26 \equiv 2 \pmod{24}$$

Jadi jika sekarang pukul 10.00 maka 10000 jam lagi pukul 02.00

2. Toni melakukan perjalanan dengan mobil menuju kota Jakarta. Ia berangkat dari rumah pukul 09.00, setelah melakukan perjalanan selama 18 jam ia tiba di Jakarta. Pada pukul berapa Toni tiba di Jakarta ?

Penyelesaian :

Cara I

$$09.00 + 18.00 = 27.00 \equiv 03.00 \pmod{24}$$

Jadi Toni tiba di Jakarta pada pukul 03.00 keesokan harinya

Cara II

$$09.00 + 18.00 = 27.00$$

$$= 1^{27}$$

$$= 1^{24} + 1^3$$

$$= 0 + 3 = 03.00$$

jadi Toni tiba di Jakarta pada pukul 03.00 keesokan harinya

3. Jika sekarang pukul 16.00, maka pukul berapa 500 jam kemudian ?

Penyelesaian :

Cara I

$$500 \equiv 20 \pmod{24}$$

$$\text{jadi } 16 + 20 = 36 \equiv 12 \pmod{24}$$

$$\text{atau } 500 + 16 = 516 \equiv 12 \pmod{24}$$

Jadi jika sekarang pukul 16.00 maka 500 jam lagi pukul 12.00

Cara II

$$\begin{aligned}500 &= 1^{500} \\ &= 1^{480} + 1^{20} \\ &= 1^{(2)^{20}} + 1^{20} \\ &= (0)^{20} + 1^{20} \\ &= 0 + 20 \\ &= 20, \text{ sehingga}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}500 + 16 &= 20 + 16 \\ &= 36 \\ &= 1^{24} + 12 \\ &= (0) + 12 \\ &= 12\end{aligned}$$

Jadi jika sekarang pukul 16.00 maka 500 jam lagi pukul 12.00

4. Butet berangkat dari Surabaya ke Medan dengan menggunakan kapal motor Kerinci. Setelah berlayar selama 57 jam 35 menit kapal tiba di Medan. Jika kapal tiba di Medan hari Sabtu tanggal 26 Juni 2004 pukul 16.05, pukul berapa dan hari apa kapal bertolak dari Surabaya ?

Penyelesaian :

Cara I

$$57 \equiv 9 \pmod{24}$$

Jadi 57 jam 35 menit \equiv 9 jam 35 menit (mod 24)

$$16.05 - 09.35 = 06.30$$

$$\text{Hasil bagi bulat } 57 : 24 = 2$$

Jadi kapal berangkat dari Surabaya hari Kamis tanggal 24 Juni 2004 pukul 06.30.

Cara II

$$\begin{aligned}57 &= 1^{57} = 1^{48} + 1^9 \\ &= 1^{(24)^2} + 1^9 \\ &= (0)^2 + 9 \\ &= 0 + 9 = 9, \text{ sehingga } 57 \text{ jam } 35 \text{ menit } \equiv 9 \text{ jam } 35 \text{ menit}\end{aligned}$$

$\therefore 16.05 - 09.35 = 06.30$, berdasarkan perhitungan di atas maka kapal berangkat dari Surabaya hari Kamis tanggal 24 Juni 2004 pukul 06.30.

KESIMPULAN

Penerapan sifat jumlahan grup modulo 12 (Z_{12}) dan modulo 24 (Z_{24}) pada menunjukkan bahwa secara matematika, khususnya aljabar dapat diterapkan dalam kehidupan keseharian untuk membantu menyelesaikan masalah yang ada.

DAFTAR PUSTAKA

- Gallian, A. Joseph. (1990), *Contemporary Abstract Algebra*, Toronto : D.C Heath and Company.
- Herstein, I. N. (2000), *Topics in Algebra*, 2nd Edition. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd.
- Niven, I dan H. S. Zuckerman, (1980). *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th Edition. New York: John Wiley & Sons.