# ANALISIS REGULERISASI OPTIMISASI KONVEKS TIGA TAHAP

**Lasker P. Sinaga**

**Abstrak**

Regulerisasi adalah teknik penyederhanaan yang dilakukan pada optimisasi bertahap. Optimisasi konveks tiga tahap dapat diregulerisasi sebanyak dua tahap. Pertama dilakukan pada kedua kendalanya sehingga diperoleh optimisasi dua tahap yang baru. Kemudian diregulerisasi kembali dengan skalar yang baru dan diperoleh optimisasi yang sangat sederhana. Fungsi penalty yang diperoleh adalah bersifat konveks, lipschitz dan konvergen seragam.

**Kata kunci :** *Optimisasi bertahap*, *Optimisasi konveks*, *Regulerisasi*

## A. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari diselesaikan secara matematis dengan memformulasi model matematika dan menemukan solusi atau pendekatan solusi. Optimisasi matematika membantu mendapatkan solusi yang memenuhi fungsi tujuan dan kendalanya. Sebagai contoh adalah meminimumkan biaya transport suatu barang dari kota A ke kota B. Secara alami, dasar pemikiran pertama adalah meminimumkan jarak ataupun waktu tempuh kedua kota, tetapi bila masalah ini dianalisis lebih lanjut, terkadang solusi yang diambil masih dapat menyebabkan masalah selanjutnya. Pada contoh di atas, jarak yang sedekat mungkin boleh menjadi solusi awal tetapi kenyataannya tidak selamanya jarak yang dekat menyelesaikan masalah di atas. Bagaimana dengan tingkat kemacetan atau lebar jalan terhadap jalan yang dipilih sebagai solusi tersebut? Hal ini membuat kita harus membuat suatu model matematika yaitu optimisasi bertahap. Pada optimisasi dua tahap, sebuah himpunan yang memuat variabel yang menjadi solusi awal dari masalah optimisasi ini akan menjadi parameter untuk variabel lainnya. Ye (1999). Hal ini berarti ada proses dua tahap (*Level Upper dan Level Lower*) yang dilakukan yaitu dengan setiap keputusan pada *level upper atau outer problem* maka ditentukan keputusan pada *lower problem atau inner problem*. Vicente (1997) dan lihat juga Wang (2008).

Optimisasi bertahap bertujuan menemukan solusi yang memperdamaikan antara kendala, fungsi tujuan pertama, fungsi tujuan kedua dan seterusnya. Jika sebuah solusi layak pada fungsi tujuan pertama terkumpul maka akan diseleksi dan dikumpulkan kembali solusi-solusi layak yang memenuhi kendalanya. Chio (2004) dan Audet (2006).

Optimisasi ini termasuk kasus yang sulit diselesaikan sehingga banyak ilmuan mencari berbagai metode untuk menyelesaikannya, seperti Metode Steepest Descent, lihat Solodov (2007), Proyeksi Gradien atau berbagai algoritma, lihat Calamai (1987). Untuk menyederhanakan optimisasi ini, diperlukan kombinasi dengan teknik regulerisasi, lihat Ali (2005).

## B. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dengan berbagai dukungan definisi dan teorema.

## C. PEMBAHASAN DAN HASIL

### 1. Optimisasi Konveks Tiga Tahap

Optimisasi konveks adalah optimisasi dengan daerah asal fungsi, fungsi objektif serta fungsi kendalanya bersifat konveks. Optimisasi konveks tiga tahap diformulasikan sebagai berikut:

$$\min_{x_1,x_2,x_3} f_1(x_1,x_2,x_3)$$

$$\text{st } (x_2,x_3) \text{ solusi } \min_{\xi_2,\xi_3} f_2(x_1,\xi_2,\xi_3)$$

$$\text{st } \xi_3 \in \arg\min f_3(x_1,\xi_2,\cdot)$$

Untuk $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$, $x_3 \in R^{n_3}$ dan $f_1 : R^{n_1} \to R$, $f_2 : R^{n_2} \to R$, $f_3 : R^{n_3} \to R$

Jika setiap nilai variabel yang memenuhi fungsi obyektif pertama maka didefinisikan himpunan solusi yang meminimumkan fungsi kendala pada tahap kedua yang bergantung pada solusi tahap pertama tersebut, demikian seterusnya pada tahap ketiga. Untuk mempermudah tahap yang tersebut diperlukan strategi regulerisasi untuk menyederhanakan model sehingga mempermudah mendapatkan solusi yang memperdamaikan ketiga fungsi obyektif bertahap tersebut.

## 2. Regulerisasi Optimisasi Konveks Tiga Tahap

Regulerisasi adalah metode skalarisasi yang digunakan untuk menyederhanakan dan menyelesaikan optimisasi bertahap. Tujuan dari regulerisasi adalah mendapatkan suatu keadaan yang seimbang antara fungsi tujuan dan kendalanya yang sedang dalam keadaan konflik. Untuk mencapai keadaan setimbang inilah diperlukan metode regulerisasi.

**Definisi 1** (*Regulerisasi*) Misalkan $P$ adalah sebuah bentuk optimisasi dengan dua fungsi objektif $\|Ax-b\|$ dan $\|x\|$ sebagai berikut:

$$P: \quad \text{Minimize}_x \quad (\|x\|, \|Ax-b\|)$$

$$s.t \qquad x \in R^n$$

sehingga bentuk regulerisasi dari masalah $P$ di atas dituliskan:

$$P(\delta): \quad \text{Minimize}_x \quad \delta\|x\| + \|Ax-b\|, \quad \delta > 0$$

$$s.t \qquad x \in R^n$$

untuk sebuah barisan naik (*increasing sequence*) konstan $\delta$ dengan $\delta \to +\infty$. Kuantitas skalar $\delta$ disebut dengan parameter penalty.

Dengan demikian pada optimisasi konveks tiga tahap, tujuan regulerisasi adalah menemukan vektor $x \in C$, dengan $C$ adalah himpunan konveks yang mengoptimumkan permasalahan optimisasi vektor dengan tiga fungsi obyektif.

Misalkan $x_1$ fix maka solusi layak optimisasi bergantung pada kedua kendalanya. Kedua kendala tersebut adalah permasalahan optimisasi dua tahap, sebagai berikut:

$$\min_{\xi_2, \xi_3} f_2(x_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$\text{st} \quad \xi_3 \in \arg\min f_3(x_1, \xi_2, \cdot)$$

Untuk $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^{n_1} \times R^{n_2} \times R^{n_3}$ maka optimisasi dua tahap dapat diubah menjadi:

$$\min f_2(x)$$

$$\text{st} \quad \xi_3 \in \arg\min f_3(x)$$

diregulerisasi menjadi,

$$h_\mu(x) = \mu f_2(x) + f_3(x) \text{ dengan } \mu > 0$$

Dengan demikian optimisasi konveks tiga tahap dapat diformulasikan kembali menjadi:

$$\min \ f_1(x)$$

$$\text{st} \ \ x \in S \ = \arg \ \min\{ \ h_\mu(x) \mid x \in C\}$$

diregulerisasi kembali menjadi,

$$\psi_\lambda(x) = \lambda f_1(x) + h_\mu(x) \ \text{ dengan } \lambda > 0$$

atau

$$\psi_\lambda(x) = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) + f_3(x) \ \text{ dengan } \mu > 0 \ \text{ dan } \lambda > 0$$

## 3. Analisis Regulerisasi

**Definisi 2** Sebuah fungsi $\psi : R^n \to R$ adalah konveks jika domain $\psi$ adalah himpunan konveks dan jika untuk setiap $x_1, x_2 \in Dom\psi$ dan untuk setiap $0 \le \theta \le 1$, $\psi(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta\psi(x_1) + (1-\theta)\psi(x_2)$

Dari definisi di atas, fungsi $\psi_\lambda(x)$ merupakan fungsi konveks.

Jika $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ merupakan fungsi konveks dan $\mu > 0$ dan $\lambda > 0$ maka:

$$\lambda f_1(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \lambda\theta f_1(x_1) + \lambda(1-\theta) f_1(x_2)$$

$$\mu f_2(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \mu\theta f_2(x_1) + \mu(1-\theta) f_2(x_2)$$

$$f_3(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta f_3(x_1) + (1-\theta) f_3(x_2)$$

sehingga

$$\lambda f_1(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + \mu f_2(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + f_3(\theta x_1 + (1-\theta)x_2)$$

$$\le \lambda\theta f_1(x_1) + \lambda(1-\theta) f_1(x_2) + \mu\theta f_2(x_1) + \mu(1-\theta) f_2(x_2) + \theta f_3(x_1) + (1-\theta) f_3(x_2)$$

$$\le \lambda\theta f_1(x_1) + \mu\theta f_2(x_1) + \theta f_3(x_1) + \lambda(1-\theta) f_1(x_2) + \mu(1-\theta) f_2(x_2) + (1-\theta) f_3(x_2)$$

$$\le \theta[\lambda f_1(x_1) + \mu f_2(x_1) + f_3(x_1)] + (1-\theta)[\lambda f_1(x_2) + \mu f_2(x_2) + f_3(x_2)]$$

atau

$$\psi_\lambda(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta\psi_\lambda(x_1) + (1-\theta)\psi_\lambda(x_2)$$

**Teorema 1** Jika $\psi : C \to R$ adalah fungsi konveks maka $\psi$ adalah fungsi Lipschitz.

**Bukti:** Fungsi $\psi : C \to R$ dan $x_1, x_2 \in C$ disebut fungsi konveks jika memenuhi:

$$\psi(x_2) \geq \psi(x_1) + \nabla\psi(x_1)^T (x_2 - x_1)$$

atau diformulasi menjadi:

$$\psi(x_1) - \psi(x_2) \leq \nabla\psi(x_1)^T (x_1 - x_2)$$

dengan menggunakan operator norm maka

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq \nabla\psi(x_1)^T |x_1 - x_2|$$

dengan $K = \nabla\psi(x_1)^T$ maka kondisi tersebut memenuhi fungsi Lipschitz. ■

**Teorema 2** Jika $\psi : A \to R$ adalah fungsi Lipschitz maka $\psi$ adalah fungsi kontinu seragam pada $A$.

**Bukti:** Jika kondisi fungsi Lipschitz $\psi : A \to R$ dipenuhi dengan konstanta $K > 0$, kemudian diberikan $\varepsilon > 0$ dan mengambil $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / K$ sedemikian sehingga untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ memenuhi:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| < K\varepsilon / K = \varepsilon \text{ ■}$$

Jika adalah $f_1$ fungsi konveks terbatas dalam C sehingga:

$$-\infty < \bar{f}_1 = \inf\{f_1(x) \mid x \in C\}$$

dan fungsi $h_\mu$ akan secara langsung menjadi fungsi terbatas dalam C sehingga,

$$-\infty < \overline{h}_\mu = \min\{h_\mu(x) \mid x \in C\}$$

sehingga

$$\psi_\lambda(x) = \lambda(f_1(x) - \bar{f}_1(x)) + (h_\mu(x) - \overline{h}_\mu(x))$$

Jika fungsi $\psi_\lambda$ adalah kontinu maka memberikan kesempatan mencari sebuah solusi $x^\lambda \in C$ berupa iterasi yang konvergen dengan,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \psi_\lambda = 0 \text{ dan } \sum_{\lambda=0}^{\infty} \psi_\lambda = +\infty$$

Sekarang, tergantung ke berbagai algoritma dalam menyelesaikan fungsi teregulerisasi. Algoritma yang tepat adalah algoritma yang teratur dan akurasi yang cepat pada iterasinya dalam menemukan solusi yang layak. Dengan konveksitas fungsi maka sangat memungkinkan untuk membuktikan kekonvergenan dari barisan solusi yang dibangkitkan algoritma penyelesaian.

Dengan demikian kekontinuan dan kekonvergenan yang seragam sebuah fungsi yang teregulerisasi pada optimisasi konveks bertahap (3 tahap) mempermudah dalam proses pencarian solusi layak pada optimisasi konveks bertahap tersebut secara algoritma.

## D. KESIMPULAN DAN SARAN

### 1. Kesimpulan

Kekontinuan dan kekonvergenan seragam fungsi teregulerisasi dari optimisasi konveks tiga tahap mempermudah pelacakan solusi layak optimisasi dengan menggunakan iterasi.

### 2. Saran

Perlu dilakukan analisis regulerisasi untuk memperlihatkan kekontinuan, keseragaman dan kestabilan iterasi solusi pada optimisasi konveks *n* tahap dan memperlihatkan contoh kasus yang aplikatif di kehidupan sehari-hari.

## DAFTAR PUSTAKA


Aboussoror, A., Mansouri, A. (2005). Weak linear bilevel programming problems: existence of solutions via a penalty method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 304 (2005) 399–408.

Ali, M. S. S. (2005). Descent Methods for Convex Optimization Problems in Banach Spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Science*, Vol 15 No 2005, 2347-2357.

Ankhili, Z., Mansouri, A. (2008). An Exact Penalty on Bilevel Programs with Linear Vector Optimization Lower Level, European Journal of Operational Research, Journal Homepage: www.elsevier.com/locate/ejor.

Audet, C., Haddad, J., Savard, G. (2006). A Note on the Definition of a Linear Bilevel Programming Solution, *Journal of Applied Mathematics and Computation,* Vol. 181, 351–355.

Bard, J. F., Plummer, J., Souie, J. C. (2000), A Bilevel Programming Approach to Determining Tax for Biofuel Production, *European Journal of Operational Research,* 12, 30-46.

Bartle, R. G., Sherbert, D. R. (1994), Introduction *to Real Analysis*, Jhon Wiley & Sons (SEA), INC, Singapore.

Borwein, J. M., Lewis, A. S. (1999), *Convex Analysis and NonLinear* Optimization. Gargnano, Italy.

Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). Convex *Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, USA.

Calamai, P, H., More, J, J,. (1987). Projected Gradient Methods for Linearly Constrained Problems, *Journal of Mathematical Programming*, 39, 93-116.

Chiou, S. (2004). Bilevel Programming for The Continuous Transport Network Design Problem, *Journal of*

*Transportation Research*, Part B 39 (2005), 361–383.

Farag, M. H. (1996). The Gradient Projection Method for Solving an Optimal Control Problem, J: *Applicationes Mathematicae*, vol 24 No 2, 141-147.

Freund, R. M. (2004). *Penalty and Barrier Methods for Constrained Optimization*. Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.

Gaughan E. D. (1987). *Introducton to Analysis*. Wadsworth Inc, Belmont, Pacific Grove, California, USA.

Hindi, H. (2004). *A Tutorial on Convex Optimization*. Palo Alto Research Centre (PARC), Palo Alto, California.

Iusem, A. N. (2003). On the Convergence Properties of the Projected Gradient Method for Convex Optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 22 No 1, 37-52.

Luenberger, D. G. (1974). A Combined Penalty Function and Gradient Projection Methods for Nonlienar Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 14 No 5.

Lv, Y., Hu, T., Wang G., Wan, Z. (2007). A Penalty Function Method Based On Kuhn–Tucker Condition for Solving Linear Bilevel Programming, *Journal of Applied Mathematics and Computation* , Vol. 188, 808–813.

Polak, E., Sargent, R. W. H., Sebastian, D. J. (1974). On the Convergence of Sequential Minimization Algorithms. *Journal of Optimization Theory and Applications*., Vol. 14 No. 4

Shi, C., Lu, J., Zhang, G., Zhou, H. (2006). An Extended Branch and Bound Algorithm for Linear Bilevel Programming, *Journal of Applied Mathematics and Computation,* Vol. 180, 529–537

Solodov, M. (2007). An Explicit Descent Methods For Bilevel Convex Optimization. *Journal of Convex Analysis*, Vol. 14, No. 2.

Tseveendorj, I. (2006). Reverse Convex Problems: An Approach Based On Optimality Conditions. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*. Vol. 2006, Article ID 29023, 1-16.

Vicente, L. N. (1997). Bilevel Programming. *Journal of Global Optimization*. Departemento de Matematica Universidade de Coimbra, 3000 Coimbra, Portugal.

Wang, G., Wan, Z., Wang, X., Lv, Y. (2008). Genetic Algorithm Based on Simplex Method for Solving Linear-Quadratic Bilevel Programming Problem. *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, Vol 56 No. 2008, 2550-2555.

Yang, J., Zhang, M., He, B., Yang, C. (2008). Bilevel Programming Model and Hybrid Genetic Algorithm for Flow Interception Problem with Customer Choice. *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, Journal Homepage: www.elsevier.com/locate/camwa.

Ye, J. J. (1999). Optimality Conditions for Optimization Problems with Complementarity Constraints. *Siam Journal Optimization*, Vol. 9 No. 2, 374-387.

Zhu Z., Zhang B,. (2006). A General Projection Gradient Methods for Linear Constrained Optimization with Superlinear Convergence. *Journal of Applied Sciences*, *Vol* 6 No 5, 1085-1089.