SOLUSI EKSAK DAN SOLUSI ELEMEN HINGGA PERSAMAAN LAPLACE ORDE DUA PADA RECTANGULAR

Lasker P. Sinaga

Abstrak

Teknik pemisahan variabel (separation of variable) pada persamaan laplace orde dua mereduksi persamaan menjadi beberapa persamaan differensial biasa homogen orde dua. Solusi elemen hingga persamaan Laplace pada kondisi batas dirichlet yang diselesaikan dengan Metode Galerkin mempunyai hasil yang dekat dengan solusi eksak dengan nilai eigen posistif.

Kata kunci: *Laplace, Eigen, Rectangular, Solusi Elemen Hingga*

PENDAHULUAN

Persamaan differensial merupakan bagian matematika yang sangat aplikatif diberbagai bidang dalam kehidupan sehari - hari. Berbagai strategi atau metode dikembangkan untuk menyelesaikan permasalahan – permasalahan yang ditemukan.

Persamaan differensial parsial (PDP) memuat suku - suku differensial parsial, yang diartikan sebagai suatu hubungan yang mengaitkan suatu fungsi yang tidak diketahui, yang merupakan fungsi dari beberapa variabel bebas, dengan turunan - turunannya melalui variabel - variabel yang dimaksud. PDP digunakan untuk melakukan formulasi dan menyelesaikan permasalahan yang melibatkan fungsi - fungsi yang tidak diketahui, yang dibentuk oleh beberapa variabel bebas.

Persamaan Laplace merupakan persamaan differensial yang tergolong dalam persamaan differensial parsial tipe eliptik. Persamaan laplace orde dua ditunjukkan dengan bentuk:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad (*)$$

Persamaan laplace sangat aplikatif dalam fisika matematika sehingga perlu dikaji dari berbagai sudut pandang metode penyelesaian dan menganalisis solusi yang dihasilkan. Analisis numerik dengan Metode Galerkin banyak berperan penting dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial walaupun kedekatan solusi yang dihasilkan perlu diperhatikan dengan solusi eksaknya.

Lasker P. Sinaga *adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan*

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur.

PEMBAHASAN DAN HASIL

Solusi eksak dan solusi elemen hingga persamaan laplace orde dua dengan kondisi batas pada rectangular akan ditunjukkan sebagai berikut.

Solusi Persamaan Laplace

Persamaan laplace dengan batas dirichlet:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

dengan syarat batas: $(x,y) \in R^2$ dan $0 < x < a$, $0 < y < b$

$$u(0,y) = 0 \qquad u(a,y) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad u(x,b) = 0$$

Strategi memisah variabel persamaan differensial partial akan memudahkan proses menemukan solusi. Misalkan fungsi $u(x,y) = X(x)Y(y)$ sebagai solusi persamaan laplace sehingga $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = X''(x)Y(y)$ dan $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$. Dengan demikian, persamaan laplace menjadi $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$. Proses ini membentuk dua persamaan differensial biasa homogen orde dua dengan variabel terpisah dan nilai eigen λ:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (2)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0. \qquad (3)$$

Pemisahan variabel ini memberikan kontribusi dalam menentukan atau memilih metode yang digunakan berikutnya.

a. Solusi Eksak

Persamaan differensial homogen orde dua $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ dengan $X(0) = 0$ dan $X(a) = 0$ mempunyai solusi nontrivial berdasarkan nilai eigen $\lambda > 0$ atau $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ sehingga diperoleh solusi $X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$. Persamaan (3) mempunyai solusi $Y_n = A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$. Syarat $Y(b) = 0$ menghasilkan $B_n = -A_n \coth\left(\frac{an\pi}{b}\right)$.

Bentuk (*) mempunyai solusi $u_n = \left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$.

Misalkan $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ adalah koleksi solusi persamaan (*) sehingga kelinearan persamaan laplace membuat kombinasi setiap anggota S juga merupakan solusi persamaan (*), sehingga solusi persamaan laplace adalah:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cosh\left(\frac{n®}{a}y\right)+B_n \sinh\left(\frac{n®}{a}y\right)\right)\sin\left(\frac{n®}{a}x\right)$$

Syarat batas yang diberikan mengakibatkan $\left|f(x)-\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin\left(\frac{n®}{a}x\right)\right|<£$. Solusi ini adalah fungsi kontinu dan konvergen serta stabil asimtotik.

b. Solusi Elemen Hingga

Kedua persamaan reduksi akan diselesaikan kembali dengan menggunakan Metode Galerkin. Tentu saja dengan nilai eigen yang sama dengan solusi eksak yang telah diperoleh. Perhatikan kembali persamaan $X''(x)+ªX(x)=0$. Fungsi interpolasi $X(x)=a_1+a_2x$ dan syarat batas $X(0)=a_1=X_1$ dan $X(\Delta x)=a_1+a_2\Delta x=X_2$ dimana Δx adalah panjang interval sehingga $a_2=\frac{X_2-X_1}{\Delta x}$. Dengan demikian, $X=\begin{pmatrix}N_1 & N_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ dimana $N=\begin{pmatrix}1-\frac{x}{\Delta x} & \frac{x}{\Delta x}\end{pmatrix}$ sehingga

$$X'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$$

Metode Galerkin menunjukkan:

$$R=\int N^T\left(X''(x)+ªX(x)\right)dx=0$$

$$-N^T X'(x)\Big|_{x=0}-\int_{\Delta x}\frac{d}{dx}N^T X'(x)dx+\int N^T\left(ªX(x)\right)dx=0$$

$$-\begin{pmatrix}1-\frac{x}{\Delta x}\\ \frac{x}{\Delta x}\end{pmatrix}X'(x)\Bigg|_{x=0}-\int\left(\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}1-\frac{x}{\Delta x}\\ \frac{x}{\Delta x}\end{pmatrix}\right)X'(x)dx+ª\int\begin{pmatrix}1-\frac{x}{\Delta x}\\ \frac{x}{\Delta x}\end{pmatrix}X(x)dx=0$$

$$-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}X'(0)-\int\begin{pmatrix}-\frac{1}{\Delta x}\\ \frac{1}{\Delta x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}dx+ª\int\begin{pmatrix}1-\frac{x}{\Delta x}\\ \frac{x}{\Delta x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\frac{x}{\Delta x} & \frac{x}{\Delta x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}dx=0$$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}dx+ª\int_0^{\Delta x}\begin{pmatrix}\left(1-\frac{x}{\Delta x}\right)^2 & \frac{x}{\Delta x}\left(1-\frac{x}{\Delta x}\right)\\ \frac{x}{\Delta x}\left(1-\frac{x}{\Delta x}\right) & \left(1-\frac{x}{\Delta x}\right)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}X'(0)\\0\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}+\frac{ª}{6}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X'(0)\\0\end{pmatrix}$$

Misalkan kajian dibatasi pada 4 elemen, diperoleh:

$$-\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\end{pmatrix}+\frac{\lambda\Delta x}{6}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sim\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$-\frac{1}{\Delta x}X_1+\frac{1}{\Delta x}X_2+\frac{2\lambda\Delta x}{6}X_1+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_2=\sim$$

$$\frac{1}{\Delta x}X_1-\frac{2}{\Delta x}X_2+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_1+\frac{4\lambda\Delta x}{6}X_2+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_3=0$$

$$\frac{1}{\Delta x}X_2-\frac{2}{\Delta x}X_3+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_2+\frac{4\lambda\Delta x}{6}X_3+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_4=0$$

$$\frac{1}{\Delta x}X_3-\frac{2}{\Delta x}X_4+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_3+\frac{4\lambda\Delta x}{6}X_4=0$$

Secara umum diperoleh pola:

$$\frac{1}{\Delta x}X_{n-1}-\frac{2}{\Delta x}X_n+\frac{1}{\Delta x}X_{n+1}+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_{n-1}+\frac{4\lambda\Delta x}{6}X_n+\frac{\lambda\Delta x}{6}X_{n+1}=0$$

$$X_{n+1}=\frac{\left(12-4\lambda\Delta x^2\right)X_n-\left(6+\lambda\Delta x^2\right)X_{n-1}}{6+\lambda\Delta x^2}$$

dengan $X_1=0$, $X_2=\dfrac{6\Delta x}{6+\lambda\Delta x^2}\sim$, $\lambda>0$ dan $\sim=X'(0)$

Persamaan (3) untuk variabel y dengan proses yang sama berlaku:

$$Y_{n+1}=\frac{\left(12+4\lambda\Delta y^2\right)Y_n-\left(6-\lambda\Delta y^2\right)Y_{n-1}}{6-\lambda\Delta y^2}$$

dengan $Y_1=0$, $Y_2=\dfrac{6\Delta y}{6-\lambda\Delta y^2}$, $\lambda>0$ dan $=Y'(0)$

Bentuk umum X_{n+1} dan Y_{n+1} dalah fungsi yang bergantung sepenuhnya pada turunan pertamanya masing masing.

Misalkan Δx = 1/4, Δy = 1/4 dan λ = 4 sedemikian persamaan menjadi $X''(x)+4X(x)=0$ dan $Y''(y)-4Y(y)=0$ dengan $X(0)=Y(0)=0$ dan $X'(0)=Y'(0)=4$. Kedua persamaan ini mempunyai penyelesaian $X(x)=2\sin 2x$ dan $Y(y)=e^{2y}-e^{-2y}$. Fungsi

$u(x,y) = 2\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin 2x$ adalah solusi persamaan (1) dengan nilai eigen λ = 4.

Tabel 1. Solusi eksak dan solusi elemen hingga fungsi $X(x) = 2\sin 2x$ dan $Y(y) = e^{2y} - e^{-2y}$

Variabel X	**Nilai**		**Variabel Y**	**Nilai**	
	Eksak	**Elemen**		**Eksak**	**Elemen**
0	0	0	0	0	0
1/4	0,958851	0,960000	1/4	1,042191	1,043478
2/4	1,682942	1,689600	2/4	2,350402	2,359168
3/4	1,99499	2,013696	3/4	4,258559	4,290293
1	1,818595	1,854505	1	7,253721	7,340626

Tabel 2. Solusi eksak $u(x,y) = 2\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin 2x$

		Variabel Y				
	U=XY	**0**	**1,042191**	**2,350402**	**4,258559**	**7,253721**
Variabel X	**0**	0	0	0	0	0
	0,958851	0	0,999306	2,253686	4,083324	6,955238
	1,682942	0	1,753946	3,955591	7,166908	12,207591
	1,994990	0	2,079160	4,689029	8,495782	14,471100
	1,818595	0	1,895322	4,274430	7,744593	13,191579

Tabel 3. Solusi elemen hingga $u(x,y) = 2\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin 2x$

		Elemen Y				
	U=XY	**0**	**1,043478**	**2,359168**	**4,290293**	**7,340626**
Elemen X	**0**	0	0	0	0	0
	0,9600	0	1,001739	2,264802	4,118682	7,047001
	1,689600	0	1,763061	3,986051	7,248880	12,402721
	2,013696	0	2,101248	4,750648	8,639347	14,781788
	1,854505	0	1,935136	4,375089	7,956370	13,613227

Tabel 4. Solusi eksak dan solusi elemen hingga $u(x,y) = 2\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin 2x$.

(x,y)	Nilai		Selisih	(x,y)	Nilai		Selisih
	Eksak	**Elemen**			**Eksak**	**Elemen**	
(0,0)	0	0	0	(2/4,3/4)	7,166908	7,248880	0,081972
(0,1/4)	0	0	0	(2/4,1)	12,207591	12,402721	0,195130
(0,2/4)	0	0	0	(3/4,0)	0	0	0
(0,3/4)	0	0	0	(3/4,1/4)	2,079160	2,101248	0,022088
(0,1)	0	0	0	(3/4,2/4)	4,689029	4,750648	0,061619
(1/4,0)	0	0	0	(3/4,3/4)	8,495782	8,639347	0,143565
(1/4,1/4)	0,999306	1,001739	0,002433	(3/4,1)	14,471100	14,781788	0,310688
(1/4,2/4)	2,253686	2,264802	0,011116	(1,0)	0	0	0
(1/4,3/4)	4,118682	4,118682	0	(1,1/4)	1,895322	1,935136	0,039814
(1/4,1)	6,955238	7,047001	0,091763	(1,2/4)	4,274430	4,375089	0,100659
(2/4,0)	0	0	0	(1,3/4)	7,744593	7,956370	0,211777
(2/4,1/4)	1,753946	1,763061	0,009115	(1,1)	13,191579	13,613227	0,421648

Tabel 1 menunjukkan solusi eksak persamaan (2) dan (3) dengan λ = 4. Berdasarkan Tabel 1 dan teori pemisahan variabel, solusi persamaan laplace dapat ditunjukkan pada Tabel 2. Solusi elemen hingga persamaan laplace ditunjukkan pada Tabel 3. Dengan demikian, Tabel 4 menunjukkan kedekatan solusi elemen hingga dengan solusi eksak. Solusi elemen hingga yang diperoleh pada contoh tersebut tidak terlalu signifikan berbeda dengan solusi eksak yang diperoleh.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Solusi elemen hingga dengan metode galerkin tidak signifikan jauh berbeda dengan solusi eksak persamaan laplace pada batas dirichlet (rectangular). Solusi eksak dan solusi elemen hingga diperoleh pada nilai eigen positif. Solusi elemen hingga memerlukan proses yang panjang sehingga perlu dipadukan dengan perhitungan dengan program komputer.

Saran

Kajian dilanjutkan pada proses penyelesaian Persamaan Laplace dengan Metode Galerkin secara utuh tanpa menggunakan teknik pemisahan variabel (separation of variable) terlebih dahulu serta menganalisis solusi elemen hingga yang diperoleh dan menggunakan beberapa program komputer yang mempercepat proses perhitungan.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle R. G. (1976). The Element of Real Analysis, Jhon Wiley & Sons Inc. Canada.

Brown A. L. dan Page A. (1970). Element of Functional Analysis, Van Nostrand Reinhold Company, London.

Farlow S. J. (1982). Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Jhon Wiley & Sons Inc, Canada.

Gaughan D. E. (1987). Introduction to Analysis, Wadsworth Inc, Belmont, California, USA.

Gustafson K. E. (1987). Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods, Jhon Wiley & Sons Inc. Canada.

John F. (1978). Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York Inc, New York, USA.

Seydel R. (1994). Practical Bifurcation and Stability Analysis, -Verlag New York Inc, New York, USA.

Susatio Y. (2005). Solusi Elemen Hingga Berbasis MathCAD, Andi Offset, Yokyakarta.

Tenenbaum M. dan Pollard H. (1985). Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc., New York, USA.

Tikhonov N., Vasil’eva A. B., dan Sveshnikov A. B. (1985). Differential Equations, -Verlag New York Inc, New York, USA.