

*Jurnal Inovasi Sekolah Dasar (JISD) memuat artikel yang berkaitan tentang hasil penelitian, pendidikan, pembelajaran dan pengabdian kepada masyarakat di sekolah dasar.*

<https://jurnal.unimed.ac.id/2012/index.php/jisd/index>

**PERHITUNGAN LUAS DAERAH LINGKARAN TERPOTONG DENGAN  
INTEGRAL LIPAT DUA DALAM KOORDINAT POLAR: SIMULASI  
MATLAB DAN VISUALISASI GEOMETRIS**

**Tika Irmala Sari<sup>1</sup>, Nadia Putri Nauli<sup>2</sup>, Hilmi Nur Akbar<sup>3</sup>, M. Aditya Yuda<sup>4</sup>**  
**Jurusan Matematika, Fakultas Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Negeri Medan**

[tikairmalasari4@gmail.com](mailto:tikairmalasari4@gmail.com)

---

**ABSTRACT**

*The calculation of area with specific boundaries in polar coordinates is one of the applications of double integrals widely used in mathematical and engineering analysis. This study aims to determine the area of a truncated circular region with a specific angle using double integrals in polar coordinates and implement it through MATLAB simulations. The model used consists of two concentric circles, where the area calculation only considers the outer circle while accounting for the inner circle as a boundary. The results show that the double integral method provides accurate and efficient calculations. MATLAB simulations are utilized to visualize the calculated region, clarifying the applied mathematical concepts. Additionally, the geometric patterns generated from this calculation possess aesthetic value, which can be applied in design and visual arts. This research is expected to contribute to mathematical analysis and open opportunities for further exploration in geometry modeling based on double integrals.*

**Keywords:** *Double Integral, Polar Coordinates, MATLAB Simulation, Truncated Circular Area, Geometric Visualization.*

**ABSTRAK**

Perhitungan luas daerah dengan batasan tertentu dalam koordinat polar merupakan salah satu penerapan integral lipat dua yang banyak digunakan dalam analisis matematis dan teknik. Penelitian ini bertujuan untuk menghitung luas daerah lingkaran terpotong dengan sudut tertentu menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar serta mengimplementasikannya dalam simulasi MATLAB. Model yang digunakan terdiri dari dua lingkaran konsentris, di mana perhitungan luas hanya mencakup bagian lingkaran luar dengan mempertimbangkan adanya lingkaran dalam sebagai batas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode integral lipat dua mampu memberikan hasil perhitungan yang akurat dan efisien. Simulasi MATLAB digunakan untuk memvisualisasikan daerah yang dihitung, sehingga memperjelas konsep matematis yang diterapkan. Selain itu, pola geometris yang dihasilkan dari perhitungan ini juga memiliki nilai estetika yang dapat diterapkan dalam desain dan seni visual. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam bidang analisis matematis serta membuka peluang untuk eksplorasi lebih lanjut dalam pemodelan geometri berbasis integral lipat dua

**Kata Kunci:** *Integral Lipat Dua, Koordinat Polar, Simulasi MATLAB, Luas Lingkaran Terpotong, Visualisasi Geometris.*

✉ Corresponding author :

Email : tikairmalasari4@gmail.com

HP : 085767654504

Received 15 Juni 2025, Accepted 25 Juni 2025, Published 30 Agustus 2025



## PENDAHULUAN

Integral lipat dua dalam koordinat polar merupakan salah satu metode penting dalam analisis matematis yang digunakan untuk menghitung luas daerah dengan batasan melingkar. Metode ini banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang, termasuk fisika, teknik, dan pemodelan geometri. Dalam perhitungan luas daerah berbentuk lingkaran yang tidak utuh, seperti sektor lingkaran atau daerah yang terpotong oleh batas tertentu, koordinat polar menjadi pilihan yang lebih sederhana dibandingkan koordinat Kartesius karena sifat simetrisnya terhadap pusat lingkaran.

Penelitian ini bertujuan untuk menghitung luas daerah lingkaran terpotong dengan sudut tertentu menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar serta mengimplementasikannya dalam simulasi MATLAB. Model yang digunakan melibatkan dua lingkaran konsentris, di mana perhitungan luas hanya mencakup bagian lingkaran luar dengan mempertimbangkan adanya lingkaran dalam sebagai batas. Penggunaan MATLAB dalam penelitian ini tidak hanya mempermudah perhitungan numerik tetapi juga membantu dalam visualisasi daerah yang dihitung, sehingga memberikan pemahaman yang lebih intuitif terhadap konsep integral lipat dua.

Selain itu, pola geometris yang terbentuk dari perhitungan ini memiliki nilai estetika yang dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang seperti desain grafis, arsitektur, dan seni visual. Oleh karena itu, penelitian ini tidak hanya berkontribusi dalam analisis matematis tetapi juga membuka wawasan baru dalam

pemanfaatan konsep integral dalam bidang estetika dan visualisasi geometri. Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengembangkan metode perhitungan luas daerah lingkaran terpotong menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.
2. Mengimplementasikan metode tersebut dalam simulasi MATLAB untuk analisis numerik dan visualisasi grafis.
3. Mengeksplorasi nilai estetika dari pola geometris yang dihasilkan melalui perhitungan integral lipat dua.

Dengan penelitian ini, diharapkan dapat diperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai penerapan integral lipat dua serta memberikan manfaat dalam bidang analisis matematis dan visualisasi geometri.

(Asna, 2024) Integral lipat-dua (double integrals) adalah bentuk integral biasa/tunggal yang hasil pengintegralan pertama harus diintegrasikan kembali. Biasanya dinyatakan sebagai berikut:

$$\iint f(x,y) dx dy$$

Pernyataan diatas disebut dengan integral lipat dua tak tentu (indifinite double integrals) dikarenakan tidak memiliki batas atas dan batas bawah. Sedangkan pada kondisi lainnya, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx dy$$

Pernyataan diatas disebut integral lipat dua tentu (definite double integrals) dikarenakan memiliki batas atas dan batas bawah dengan konsep pengintegralan sama dengan integral lipat dua tak tentu.

Sifat-Sifat Integral Lipat Dua berdasarkan (Andriani, 2020) antara lain:

Sifat 1

$$\begin{aligned} \iint [f(x, y) + g(x, y)] dx dy dA \\ = \iint f(x, y) dA \\ + \iint g(x, y) dA \end{aligned}$$

Sifat 2

$$\iint c f(x, y) dA = c \iint f(x, y) dA$$

Dimana  $c$  adalah konstanta

Sifat 3

Jika  $f(x, y) \geq g(x, y)$  untuk seluruh  $(x, y)$  di  $R$ , maka

$$\iint f(x, y) dA \geq \iint g(x, y) dA$$

(Imaniyah, Susanto, & Lestari, 2021)

menyebutkan bahwa penerapan integral dalam menentukan panjang kurva pada bidang dapat digunakan untuk membuktikan rumus keliling lingkaran, dimana lingkaran merupakan himpunan titik-titik pada suatu bidang yang berjarak tetap dari titik tertentu yang disebut sebagai pusat lingkaran, selain itu lingkaran juga dinyatakan sebagai kurva tertutup sederhana, yang disebut sebagai keliling lingkaran.

Dalam suatu penelitian (Irwan, Irwan, Darmiani, & Jalil, 2021) menyebutkan bahwa geometri merupakan cabang matematika yang berkaitan dengan bentuk, ukuran dan sifat ruang maka dari itu geometri dapat disebut juga sebagai cabang yang sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari. Adapun pengaplikasian geometri diantaranya pada

pengukuran luas suatu daerah dan perhitungan volume suatu ruang.

(ADNAN, 2020) menyebutkan bahwa kurva-kurva tertentu seperti lingkaran, cardioid dan mawar lebih mudah dideskripsikan dalam koordinat kutub daripada dengan koordinat Cartesius. Koordinat polar adalah sistem koordinat yang digunakan untuk menentukan posisi suatu titik dalam bidang dengan menggunakan jarak dari titik pusat (radius,  $\theta$ ) dan sudut terhadap sumbu referensi (sudut,  $\theta$ ). (Yanti & Saraswati) untuk menentukan garis singgung pada kurva polar  $r = f(\theta)$  dimana  $\theta$  sebagai parameter dan menulis persamaan parametriknya sebagai:

$$x = r \cos \theta = f(\theta) = \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = f(\theta) = \sin \theta$$

Koordinat polar dapat digunakan juga dalam berbagai bidang, seperti dalam bidang fisika analisis fenomena dengan simetri radial, seperti medan elektromagnetik, dalam bidang navigasi penentuan posisi relatif berdasarkan jarak dan sudut<sup>1</sup>

Dalam penelitian ini nantinya akan ditentukan luas daerah permukaan lingkaran dengan sudut  $160^\circ$  (tidak lingkaran utuh) menggunakan rumus-rumus yang nantinya akan dibahas dalam pembahasan, dan akan dilakukan simulasi melalui MATLAB.

(Tampubolon, Lase, Situngkir, & Sianturi) menyebutkan terdapat ratusan bahkan ribuan program aplikasi atau perangkat lunak yang dapat dimanfaatkan untuk pembelajaran matematika, salah satu perangkat lunak yang dapat

<sup>1</sup> <https://www.kreatifmatematika.com/2025/02/trigonometri-asyik-mengenal-sistem-koordinat-polar-dengan-mudah.html>

digunakan dalam pembelajaran Kalkulus, khususnya mengenai integral lipat dua, yaitu Matrix Laboratory (MATLAB) Program MATLAB ini dapat dimanfaatkan untuk meningkatkan kecepatan dan keakuratan dalam berbagai perhitungan integral lipat dua sehingga waktu yang diperlukan untuk mengerjakan lebih efisien dan hasil yang diperoleh lebih akurat dibandingkan dengan perhitungan yang dilakukan secara manual, juga dapat memvisualisasikan grafik dalam bentuk 2 dimensi maupun 3 dimensi yang tentu saja sulit jika digambar secara manual, sehingga diharapkan dengan menggunakan Matlab dapat meningkatkan pemahaman terhadap materi kalkulus yang dipelajari. Namun akan lebih baik jika dilakukan perhitungan secara manual lalu membandingkan dengan hasil simulasi pada MATLAB.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan observasi langsung dan pengukuran nyata terhadap objek berbentuk lingkaran yang memiliki dua batas konsentris. Data yang digunakan diperoleh dari pengukuran langsung di lapangan untuk menentukan radius lingkaran luar dan dalam, serta sudut pemotongan yang akan dianalisis. Hasil pengukuran ini kemudian dibandingkan dengan hasil perhitungan teoritis menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Metode penelitian ini terdiri dari beberapa tahapan sebagai berikut:

### 1. Observasi dan Pengukuran Data Real

- Melakukan pengamatan terhadap objek berbentuk

lingkaran yang sesuai dengan model penelitian.

- Mengukur radius lingkaran luar dan lingkaran dalam menggunakan alat ukur yang tepat, seperti meteran atau jangka sorong, untuk mendapatkan data yang akurat.
- Menentukan sudut pemotongan lingkaran yang akan digunakan dalam perhitungan.

### 2. Analisis Teoretis dengan Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

- Menyusun model matematis berdasarkan teori integral lipat dua dalam koordinat polar.
- Merumuskan batas-batas integral yang sesuai dengan radius dan sudut yang telah diukur sekaligus menghitung luas daerah menggunakan teknik integral lipat dua secara analitis.

### 3. Implementasi dan Simulasi MATLAB

- Mengembangkan skrip MATLAB untuk menyelesaikan integral lipat dua secara numerik.
- Melakukan simulasi untuk memverifikasi hasil perhitungan teoritis dengan hasil komputasi.
- Memvisualisasikan daerah lingkaran yang dihitung dalam MATLAB untuk memahami distribusi luasnya secara lebih jelas.

### 4. Analisis Hasil dan Interpretasi

- Membandingkan hasil perhitungan secara analitis dan numerik dengan data real dari pengukuran lapangan.
- Mengeksplorasi pola geometris yang terbentuk dari simulasi sebagai bagian dari nilai estetika penelitian.

## HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN



**Gambar.1: Objek Penelitian**

Data yang didapatkan setelah observasi dan pengukuran:

Jari-jari lingkaran luar :  $r_1 = 186$

Jari-jari lingkaran dalam :  $r_2 = 250$

Jari-jari lingkaran kecil :  $r_3 = 60.5095 \text{ cm}$



**Gambar.2: Pengukuran sudut**

Perhitungan untuk mendapatkan jari-jari lingkaran kecil:

Diketahui: keliling lingkaran kecil di tengah: 380 cm

Maka:  $K = 2\pi r, \pi = 3,14$

$$r = \frac{k}{2\pi} = \frac{380}{2\pi} = \frac{380}{6.28} = 60,5095 \text{ cm}$$

Sudut lingkaran :  $105^\circ$ , dalam radian:

$$\frac{105}{180} \pi = \frac{7}{12} \pi$$

Perhitungan dan analisis:

Perhitungan daerah lingkaran luar ( $r_2$  sampai  $r_1$ )

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r dr &= \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{1}{2} (r_2)^2 - \frac{1}{2} (r_1)^2 \\ &= \frac{1}{2} 62500 - \frac{1}{2} 34596 \\ &= \frac{62500}{2} - \frac{34596}{2} \\ &= \frac{27904}{2} = 13952 \\ \int_0^{\frac{7\pi}{12}} 13952 d\theta &= 13952 \cdot \frac{7\pi}{12} \\ &= \frac{97664}{12} \pi \\ &= \frac{24416}{3} \pi \end{aligned}$$

Maka untuk Luas Daerah Lingkaran Luar adalah  $\frac{24416}{3} \pi$

Perhitungan daerah lingkaran kecil (0 sampai  $r_2$ )

$$\begin{aligned} \int_0^{r_3} r dr &= \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^{r_3} \\ &= \frac{1}{2} (60,5095)^2 = \frac{3661,51}{2} \\ &= 1830,76 \\ \int_{12}^{7\pi} 1830,76 \cdot \frac{7}{12} \pi & \\ &= \frac{12815,32}{12} \pi = \frac{3203,83}{3} \pi \end{aligned}$$

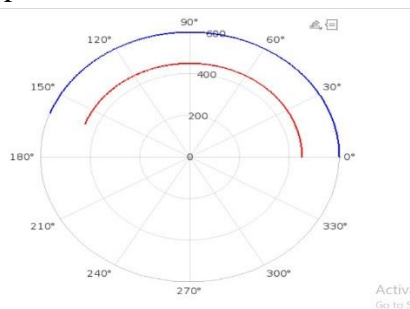
Maka untuk Luas Daerah Lingkaran Dalam adalah  $\frac{3203,83}{3} \pi$ .

Sehingga untuk luas daerah keseluruhan lingkaran adalah

$$L_{\text{keseluruhan}} = \frac{24416}{3}\pi - \frac{3203,83}{3}\pi$$

$$= \frac{21212,17}{3}\pi$$

Visualisasi menggunakan MATLAB menampilkan



**Gambar.3: Visualisasi Matlab**

## SIMPULAN

Berdasarkan hasil observasi, pengukuran, dan perhitungan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar, diperoleh luas daerah lingkaran terpotong dengan sudut tertentu. Dengan model dua lingkaran konsentris serta satu lingkaran kecil di tengah, perhitungan luas dilakukan dengan mengintegrasikan daerah lingkaran luar dan mengurangkan luas lingkaran kecil.

Dari hasil analisis, diperoleh luas daerah lingkaran luar sebesar  $\frac{24416}{3}\pi$  dan luas lingkaran kecil sebesar  $\frac{3203,83}{3}\pi$ . Sehingga, luas daerah keseluruhan yang dihitung adalah  $\frac{21212,17}{3}\pi$ .

Implementasi MATLAB membantu dalam visualisasi geometri dari hasil perhitungan, memperjelas konsep matematis yang diterapkan. Selain memberikan solusi dalam analisis geometri, penelitian ini juga membuka peluang eksplorasi lebih lanjut dalam pemodelan matematis serta aplikasi dalam bidang desain dan rekayasa berbasis geometri.

## DAFTAR RUJUKAN

- [1] ADNAN, S. R. (2020). *Integral lipat* (Vol. 1, Issue Ind 124).
- [2] Andriani, P. (2020). *Kalkulus Peubah Banyak*. Mataram: Sanabil.
- [3] Asna, R. (2024). Integral Lipat Dua dalam Koordinat Kutub (Polar). *Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan*, 1(2), 88-98.
- [4] Imaniyah, A., Susanto, K., & Lestari, A. S. (2021). APLIKASI INTEGRAL UNTUK MEMBUKTIKAN RUMUS KELILING LINGKARAN. *EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 9(1), 17-23.
- [5] Irwan, M., Irwan, Darmiani, & Jalil, E. (2021). Penerapan Integral Lipat Dua dalam Penentuan Volume Permukaan Kuadratis. *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, 9(1).
- [6] Tampubolon, A. P., Lase, K. N., Situngkir, K. M., & Sianturi, S. (n.d.). APLIKASI MATLAB PADA INTEGRAL LIPAT DUA.
- [7] Yanti, Y. T., & Saraswati, P. (n.d.). Koordinat Polar dalam Batik Kawung Yogyakarta Indonesia. *i-WIN Library Perpustakaan Internasional Waqaf Ilmu Nusantara*.

<https://www.kreatifmatematika.com/2025/02/trigonometri-asyik-mengenal-sistem-koordinat-polar-dengan-mudah.html>