KARISMATIKA—ISSN : 2443-0366
TAHUN 1 VOL. 1 NO. 2 AGUSTUS 2015

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG PADA ELIPS

Depi Fitraini[1], Mashadi[2], Kartini[3]
[1,] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, Universitas Riau
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, KampusBinaWidya, SimpangBaru, Pekanbaru, Riau 28293
Email: depi_fitraini@yahoo.com
[2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Mipa, Universitas Riau
Jl. HRSoebrantas KM 12,5, KampusBinaWidya, SimpangBaru, Pekanbaru, Riau 28293
Email: mashadi..mat@gmail.com
Email:tin_baa@yahoo.com

ABSTRAK

Persamaan garis singgung melalui suatu titik di luar elips dapat ditentukan dengan satu alternatif yaitu dengan metode substitusi diskriminan. Pada tulisan ini akan dibahas alternatif lain menentukan persamaan garis singgung melalui suatu titik di luar elips dengan cara garis kutub, dibahas pula koordinat titik singgung dari titik di luar elips.

Kata Kunci: Garis singgung elips

ABSTRACT

Equation of a tangent through a point outside the ellips can be determined with one alternative that is discrimination substitution. In this article will discuss about another alternative through the equation tangent through a point outside the ellips, by means of line poles. Discussed at the coordinates of the point of tangency of point outside the ellip .

Keywords: *Tangent through ellips*

PENDAHULUAN

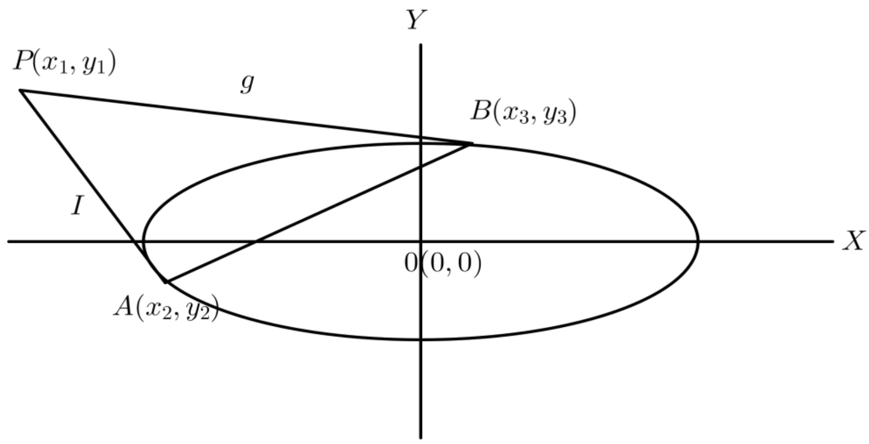
Persamaan garis singgung dari suatu titik yang terletak di luar elips telah banyak dibahas dalam beberapa buku matematika SMA, tetapi belum ada yang menurunkan rumus khusus untuk menentukan persamaan garis singgung dari suatu titik yang terletak di luar elips tersebut. Oleh karena itulah pada artikel dibahas suatu rumus khusus untuk menentukan persamaan garis singgung dari suatu titik di luar elips beserta koordinat titik singgungnya.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu menggunakan rumus persamaan garis kutub.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Elips merupakan hasil irisan suatu bidang datar dengan kerucut tegak [Mashadi].. Elips adalah kumpulan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tetap adalah konstan, titik tetap tersebut dinamakan fokus [Sehatta]. Persamaan umum elips adalah $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ [Sicelloff]. Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ terletak di luar elips dan diketahui persamaan elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dengan persamaan garis kutub $\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$ [Sartono] seperti Gambar 1.1



Gambar 1.1.Koordinat titik singgung dari titik di luar elips

Dapat ditentukan koordinat titik A$\left(x_2, y_2\right)$ dan B$\left(x_3, y_3\right)$ dengan langkah sebagai berikut:

1. **Menggunakan Persamaan Garis Kutub**

Dari persamaan garis kutub diperoleh:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$x_1 x b^2 + y_1 y a^2 = a^2 b^2$$

$$y_1 y a^2 = a^2 b^2 - x_1 x b^2$$

$$y = \frac{a^2 b^2 - x_1 x b^2}{y_1 a^2}$$

(1.1)

Substitusikan persamaan (1.1) ke persamaan elips, diperoleh:

$$a^2 y_1 x^2 + a^4 b^2 - 2a^2 b^2 x_1 x + x_1^{\,2} x^2 b^2 = a^4 y_1^{\,2}$$

$$\left(a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2\right) x^2 + \left(-2a^2 b^2 x_1\right) x + \left(a^4 b^2 - a^4 y_1^{\,2}\right) = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{2,3} = \frac{a^2 b^2 x_1 \pm a^2 y_1 \sqrt{a^2 y_1^{\,2} - a^2 b^2 + b^2 x_1^{\,2}}}{a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2}$$

Misalkan $z = \sqrt{a^2 y_1^{\,2} - a^2 b^2 + b^2 x_1^{\,2}}$

$$x_{2,3} = \frac{a^2 b^2 x_1 \pm a^2 y_1 z}{a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2}$$

(1.2)

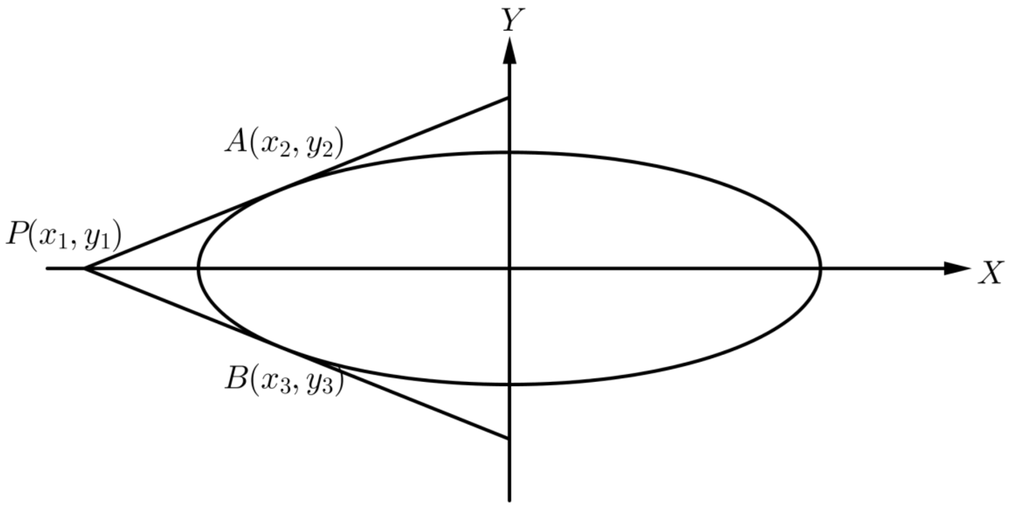
Substitusikan persamaan (1.2) ke persamaan (1.1), diperoleh:

$$y_{2,3} = \frac{a^2 b^2 y_1 \mp b^2 x_1 z}{a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2}$$

(1.3)

Persamaan (1.2) dan (1.3) adalah koordinat titik singgung A dan B dengan koordinat titik A adalah $\left(\frac{a^2 b^2 x_1 + a^2 y_1 z}{a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2}, \frac{a^2 b^2 y_1 - b^2 x_1 z}{a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2}\right)$ dan koordinat titik B adalah $\left(\frac{a^2 b^2 x_1 - a^2 y_1 z}{a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2}, \frac{a^2 b^2 y_1 + b^2 x_1 z}{a^2 y_1^{\,2} + x_1^{\,2} b^2}\right)$.

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ berada pada sumbu simetri elips yang memiliki titik singgung di titik $A(x_2, y_2)$ dan di titik $B(x_3, y_3)$ seperti Gambar 1.2.



Gambar 1.2: Koordinat titik singgung pada sumbu simetri *x*

Karena titik $P(x_1, y_1)$ berada pada sumbu simetri x maka $x_2 = x_3$ dan $y_2 = -y_3$ dan $y_1 = 0$. Maka dari persamaan (1.2) dan (1.3) diperoleh:

$$x_{2,3} = \frac{a^2 b^2 x_1}{x_1^{\,2} b^2}$$

$$y_{2,3} = \frac{\mp b^2 x_1 z}{x_1^{\,2} b^2},$$

$$z = \sqrt{-a^2 b^2 + b^2 x_1^{\,2}}$$

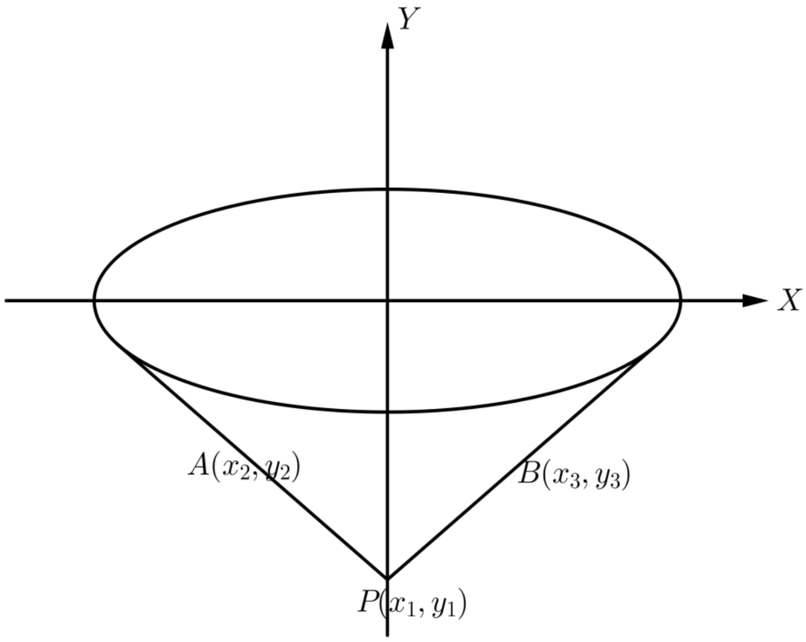
sehingga:
koordinat titik singgung $A(x_2, y_2)$ adalah

$$\left(\frac{a^2 b^2 x_1}{x_1^{\,2} b^2}, \frac{-b^2 x_1 z}{x_1^{\,2} b^2}\right) \qquad (1.4)$$

dan koordinat titik singgung $B(x_3, y_3)$ adalah $\left(\frac{a^2 b^2 x_1}{x_1^{\,2} b^2}, \frac{b^2 x_1 z}{x_1^{\,2} b^2}\right)$ (1.5)

Persamaan (1.4) dan (1.5) adalah koordinat titik singgung A dan B dari titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak di luar elips yang berada pada sumbu simetri *x*.

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ terletak di luar elips yang berada pada sumbu simetri *y* yang memiliki titik singgung di titik $A(x_2, y_2)$ dan di titik $B(x_3, y_3)$ seperti Gambar 1.3.



Gambar 1.3: Koordinat titik singgung pada sumbu simetri *y*

Karena titik $P(x_1, y_1)$ berada pada sumbu simetri y maka $-x_2 = x_3$ dan $y_2 = y_3$ dan $x_1 = 0$. Maka dari persamaan (1.2) dan (1.3) diperoleh:

$$x_{2,3} = \frac{\pm a^2 y_1 z}{a^2 y_1^{\ 2}},$$

$$z = \sqrt{a^2 y_1^{\ 2} - a^2 b^2}$$

$$y_{2,3} = \frac{a^2 b^2 y_1}{a^2 y_1^{\ 2}}$$

Sehingga:
koordinat titik singgung $A(x_2, y_2)$ adalah

$$\left(\frac{a^2 y_1 z}{a^2 y_1^{\ 2}}, \frac{a^2 b^2 y_1}{a^2 y_1^{\ 2}} \right) \qquad (1.6)$$

dan koordinat titik singgung $B(x_3, y_3)$ adalah $\left(-\frac{a^2 y_1 z}{a^2 y_1^{\ 2}}, \frac{a^2 b^2 y_1}{a^2 y_1^{\ 2}} \right)$

(1.7)

Persamaan (1.6) dan (1.7) adalah koordinat titik singgung A dan B dari titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak di luar elips yang berada pada sumbu simetri *y*.

2. Menggunakan Gradien Garis Singgung

Merujuk pada Gambar 1.1 dapat ditentukan koordinat titik singgung $A(x_2, y_2)$ dan $B(x_3, y_3)$ dengan menggunakan persamaan dibawah ini

$$\left(b^2 + a^2 m^2\right)x^2 + \left(2a^2 y_1 m - 2a^2 m^2 x_1\right)x + \left(a^2 m^2 x_1^{\ 2} - 2a^2 y_1 m x_1 + a^2 y_1^{\ 2} - a^2 b^2\right) = 0$$

dengan langkah sebagai berikut:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

nilai $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, karena menyinggung elips

$$x_{2,3} = \frac{a^2\left(m^2 x_1 - y_1 m\right)}{\left(b^2 + a^2 m^2\right)} \qquad (1.8)$$

Persamaan (1.8) adalah koordinat titik singgung $x_{2,3}$.

Untuk mencari koordinat titik $y_{2,3}$ dapat dicari dari persamaan dibawah ini:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$x = \frac{y + mx_1 - y_1}{m}$$

Substitusikan $x = \frac{y + mx_1 - y_1}{m}$ ke persamaan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, diperoleh:

$$\left(b^2 + a^2m^2\right)y^2 + \left(2mx_1b^2 - 2y_1b^2\right)y + m^2x_1^2b^2 - 2mx_1y_1b^2 + y_1^2b^2 - a^2m^2b^2 = 0$$

$y_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, karena menyingung elips maka nilai D=0.

$$y_{2,3} = \frac{y_1b^2 - mx_1b^2}{b^2 + a^2m^2}$$

(1.9)

Persamaan (1.9) adalah koordinat titik singgung $y_{2,3}$ dengan

$$m_{1,2} = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{a^2 - x_1^2}$$

Persamaan Garis Singgung dari Titik di Luar Elips

Persamaan garis singgung PA dan PB dapat dicari dengan mensubstitusikan persamaan (1.2) dan (1.3) ke persamaan (1.1), sehingga diperoleh:

$$y = \frac{a^2y_1^2 + x_1^2b^2 - b^2x_1x \pm y_1xz}{a^2y_1 \pm x_1z}$$

(1.10)

Persamaan (1.10) adalah persamaan garis singgung dari suatu titik di luar elips.

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ berada pada sumbu simetri elips yang memiliki titik singgung di titik $A(x_2, y_2)$ dan di titik $B(x_3, y_3)$ seperti Gambar 1.2, maka dari persamaan (1.8) diperoleh:

$$y = \frac{x_1^2b^2 - b^2x_1x}{\pm x_1z} \qquad (1.11)$$

dengan $z = \sqrt{-a^2b^2 + b^2x_1^2}$

Persamaan (1.11) adalah persamaan garis singgung dari titik di luar elips yang terletak pada sumbu simetri x.

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ berada pada sumbu simetri elips yang memiliki titik singgung di titik $A(x_2, y_2)$ dan di titik $B(x_3, y_3)$ seperti Gambar 1.3, maka dari persamaan (1.8) diperoleh:

$$y = \frac{a^2y_1^2 \pm y_1xz}{a^2y_1}$$

(1.12)

dengan $z = \sqrt{a^2y_1^2 - a^2b^2}$

Persamaan (1.12) adalah persamaan garis singgung dari titik di luar elips yang terletak pada sumbu simetri y.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan penelitian ini dapat disimpulkan bahwa menggunakan persamaan garis kutub untuk menentukan persamaan garis singgung dan koordinat titik singgung memiliki langkah yang lebih sederhana dikarenakan tidak perlu menentukan gradien garis singgungnya terlebih dahulu.

Bagi pembaca yang tertarik dengan penelitian ini, disarankan agar membahas persamaan garis singgung dari suatu titik yang terletak di luar elips yang dirotasi $45°$.

REFERENSI

[1] Mashadi, *Buku Ajar Geometri*, PUSBANGDIK UNRI, Pekanbaru, 2012.

[2] Sehatta Saragih, *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*, Pusbangdik UR, Pekanbaru, 2011.

[3] Sartono Wirodikromo, *Matematika 2000*, Erlangga, Jakarta, 2000.

[4] Sicelloff, L. P., G. Wentworth dan D. E. Smith, *Analityc Geometry*, Ginn and Company, Boston, 1922.