KARISMATIKA—ISSN : 2443 - 0366
TAHUN 1 VOL. 1 NO. 2 AGUSTUS 2015

SEMI KUASA TITIK TERHADAP HIPERBOLA

Irma Fitri[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]
[1,] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, Universitas Riau
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, KampusBinaWidya, SimpangBaru, Pekanbaru, Riau 28293
Email: irmafitri05@yahoo.com
[2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Mipa, Universitas Riau
Jl. HRSoebrantas KM 12,5, KampusBinaWidya, SimpangBaru, Pekanbaru, Riau 28293
Email: mashadi..mat@gmail.com
Email: gemawati.sri@gmail.com

ABSTRAK

Kuasa titik tidak hanya dibahas pada lingkaran, tetapi kuasa titik juga dapat ditentukan dari irisan kerucut lain, yaitu parabola. Pada tulisan ini dibahas mengenai cara menentukan semi kuasa titik terhadap parabola khususnya semi kuasa titik yang berada di luar lengkungan parabola..
Kata Kunci: *Kuasa titik, hiperbola*

ABSTRACT

The power of point not only discussed in the circle, but it can also be determined from other conic sections, namely hyperbola. In this paper discussed on how to determine the semi power of point on the hyperbola especially in outside of hyperbola.
Keywords: *power of point, hyperbola*

PENDAHULUAN

Kuasa titik terhadap lingkaran telah banyak dibahas di beberapa buku geometri. Lingkaran merupakan salah satu hasil irisan kerucut [Sehatta]. Irisan kerucut adalah perpotongan bidang lengkung kerucut lingkaran tegak dengan bidang datar [Mashadi]. Hasil irisan kerucut lainnya yaitu elips, parabola dan hiperbola. Berdasarkan teori kuasa titik terhadap lingkaran maka penulis tertarik untuk mengembangkan pada salah satu irisan kerucut lainnya yaitu hiperbola. Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarakknya terhadap dua titik tertentu adalah tetap [Sicelof]

Berdasarkan teori kuasa titik terhadap lingkaran diketahui bahwa kuasa titik terhadap lingkaran merupakan kuadrat panjang garis singgung suatu titik dengan lingkaran dimana garis singgung tersebut tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran [Coxeter]. Akan tetapi, pada hiperbola garis singgung dari suatu titik tidak tegak lurus terhadap *latus rectum* dan tidak selalu tegak lurus terhadap sumbu simetri.

Perhatikan Gambar 1 *PA* merupakan garis singgung terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Persamaan *latus rectum* yaitu $x=c$. Garis *PB* tegak lurus terhadap *latus rectum* dengan persamaan $y=\frac{b^2}{a}$.

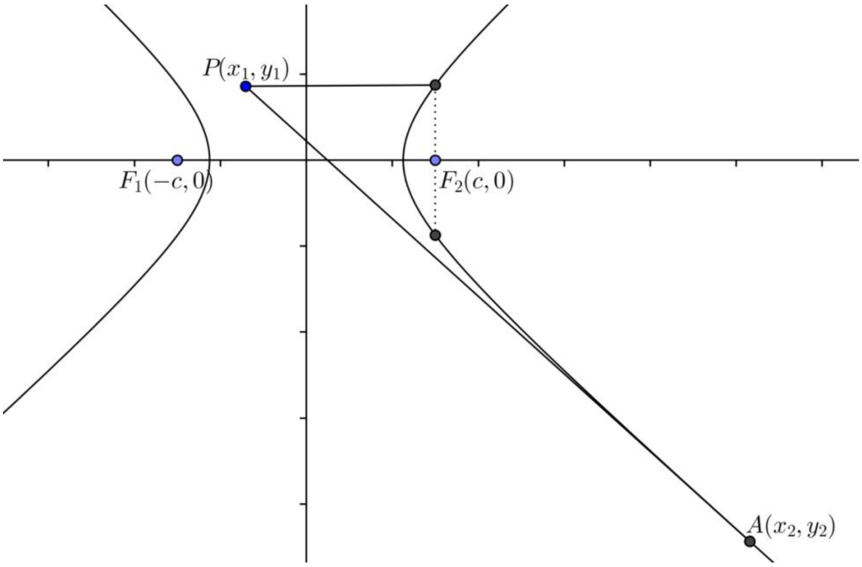
Jika persamaan $y=\frac{b^2}{a}$ disubstitusikan ke persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ maka diperoleh

$$b^2x^2-\left(b^4+a^2b^2\right)=0$$

Sehingga diperoleh nilai diskriminan

$$D=4b^2\left(b^4+a^2b^2\right)$$

Nilai $D>0$ karena $a>0$ dan $b>0$ sehingga garis *PB* memotong hiperbola di titik *B* [Weisstein]. Garis *PA* merupakan Garis singgung terhadap hiperbola maka nilai diskriminan *PA* adalah $D=0$. Oleh karena itu, garis *PA* tidak sama dengan garis *PB* maka garis *PA* tidak tegak lurus terhadap *latus rectum*.



Gambar 1: Garis singgung terhadap hiperbola

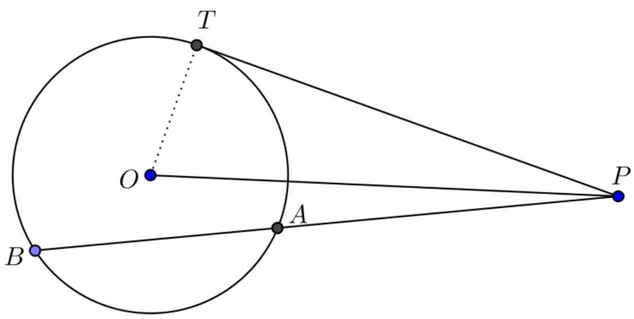
Oleh karena garis singgung dari suatu titik di luar hiperbola tidak tegak lurus terhadap *latus rectum* hiperbola dan tidak selalu tegak lurus terhadap sumbu simetri maka pada hiperbola dinamakan sebagai semi kuasa titik karena tidak memenuhi syarat tegak lurus pada konsep kuasa titik. Untuk itu penulis merumuskan judul artikel ini yaitu semi kuasa titik terhadap hiperbola.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu menggunakan definisi yang terdapat pada kuasa titik terhadap lingkaran. Selain itu, digunakan rumus jarak antara dua titik yang berlaku pada hiperbola. dalam menentukan nilai semi kuasa titik yang berada di luar lengkungan hiperbola

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan *O* titik pusat suatu lingkaran dan *R* adalah jari-jari dari lingkaran tersebut, maka kuasa titik *P* terhadap lingkaran didefinisikan sebagai $OP^2 - R^2$ [Mashadi]. Perhatikan Gambar 1.



Gambar 2 Kuasa Titik di Luar Lingkaran

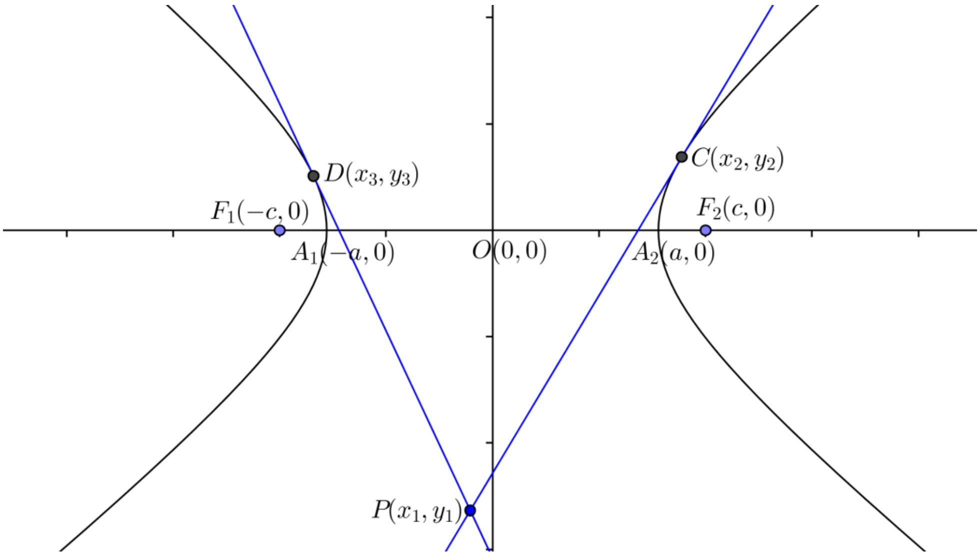
Dari Gambar 2, terlihat bahwa nilai $OP^2 - R^2 = PT^2$. Sehingga kuasa titik *P* terhadap lingkaran sebenarnya merupakan kuadrat panjang garis singgung lingkaran dari titik *P* ke titik singgungnya.

Jika titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar lengkungan hiperbola, maka secara umum dapat ditentukan nilai semi kuasa titik $P(x_1, y_1)$. Selain itu, ada kedudukan titik yang berada di luar lengkungan hiperbola yang dapat ditentukan nilai kuasa titiknya. Hal ini dikarenakan ada garis singgung hiperbola yang tegak lurus terhadap sumbu simetri hiperbola.

1. Semi Kuasa Titik $P(x_1, y_1)$ yang Berada di Luar Lengkungan Hiperbola

Semi kuasa titik di luar lengkungan hiperbola menggunakan konsep yang sama dengan kuasa titik di luar lingkaran. Kuasa titik di luar lingkaran merupakan kuadrat panjang garis singgung dari suatu titik di luar lingkaran ke titik singgung lingkaran. Sehingga semi kuasa titik di luar lengkungan hiperbola ditentukan dengan menghitung kuadrat panjang garis singgung dari suatu titik di luar lengkungan hiperbola ke titik singgung hiperbola.

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ pada Gambar 3 terletak di luar lengkungan hiperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jika ditarik garis yang menyinggung hiperbola dari titik $P(x_1, y_1)$ diperoleh titik singgung $C(x_2, y_2)$ dan $D(x_3, y_3)$. Akan ditentukan $|PC|^2$ dan $|PD|^2$ yang merupakan semi kuasa titik terhadap hiperbola dengan menggunakan persamaan garis kutub.



Gambar 3: Kedudukan Titik (x_3, y_3) di Luar Lengkungan Hiperbola

Persamaan garis kutub hiperbola:

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2$$

$$x = \frac{a^2 b^2 + a^2 y_1 y}{b^2 x_1} \qquad (1)$$

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sehingga diperoleh :

$$\frac{\left(\frac{a^2b^2+a^2y_1y}{b^2x_1}\right)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{a^4b^4+2a^4b^2y_1y+a^4y_1^2y^2}{b^4x_1^2}}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{a^4\left(b^4+2b^2y_1y+y_1^2y^2\right)}{b^2x_1^2}-a^2y^2=a^2b^2$$

$$a^4\left(b^4+2b^2y_1y+y_1^2y^2\right)-a^2b^2x_1^2y^2=a^2b^4x_1^2$$

$$a^2b^4+2a^2b^2y_1y+a^2y_1^2y^2-b^2x_1^2y^2-b^4x_1^2=0$$

$$\left(a^2y_1^2-b^2x_1^2\right)y^2+\left(2a^2b^2y1\right)y+a^2b^4-b^4x_1^2=0$$

Nilai y dapat ditentukan dengan menggunakan rumus *abc*, sehingga diperoleh :

$$y=\frac{-2a^2b^2y_1\pm\sqrt{\left(2a^2b^2y_1\right)^2-4\left(a^2y_1^2\right)\left(a^2b^4-b^4x_1^2\right)}}{2\left(a^2y_1^2-b^2x_1^2\right)}$$

$$=\frac{-a^2b^2y_1\pm\sqrt{a^4b^4y_1^2-a^4b^4y_1^2+a^2b^4x_1^2y_1^2+a^2b^6x_1^2-b^6x_1^4}}{a^2y_1^2-b^2x_1^2}$$

$$y=\frac{-a^2b^2y_1\pm b^2x_1\sqrt{a^2y_1^2+a^2b^2-b^2x_1^2}}{a^2y_1^2-b^2x_1^2}$$

Misalkan $h=\sqrt{a^2y_1^2+a^2b^2-b^2x_1^2}$ (2)

sehingga nilai y menjadi :

$$y=\frac{b^2\left(-a^2y_1\pm x_1h\right)}{a^2y_1^2-b^2x_1^2} \qquad (3)$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (1) diperoleh nilai x:

$$x=\frac{a^2b^2+a^2y_1\left(\frac{b^2\left(-a^2y_1\pm x_1h\right)}{\left(a^2y_1^2-b^2x_1^2\right)}\right)}{b^2x_1}$$

$$b^2x_1x=\frac{a^4b^2y_1^2-a^2b^4x_1^2-a^4b^2y_1^2\pm a^2b^2x_1y_1h}{a^2y_1^2-b^2x_1^2}$$

$$a^2b^2x_1y_1^2x-b^4x_1^3x=-a^2b^4x_1^2\pm a^2b^2x_1y_1h$$

$$\left(a^2y_1^2-b^2x_1^2\right)x=a^2\left(-b^2x_1\pm y_1h\right)$$

$$x=\frac{a^2\left(-b^2x_1\pm y_1h\right)}{a^2y_1^2-b^2x_1^2} \qquad (4)$$

Jadi koordinat titik singgung $C(x_2,y_2)$ yang melalui suatu titik di luar hiperbola yaitu

$$C\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1+y_1h\right)}{a^2y_1^2-b^2x_1^2},\frac{b^2\left(-a^2y_1+x_1h\right)}{a^2y_1^2-b^2x_1^2}\right) \qquad (5)$$

dan koordinat titik singgung $D(x_3,y_3)$ yang melalui suatu titik di luar hiperbola yaitu

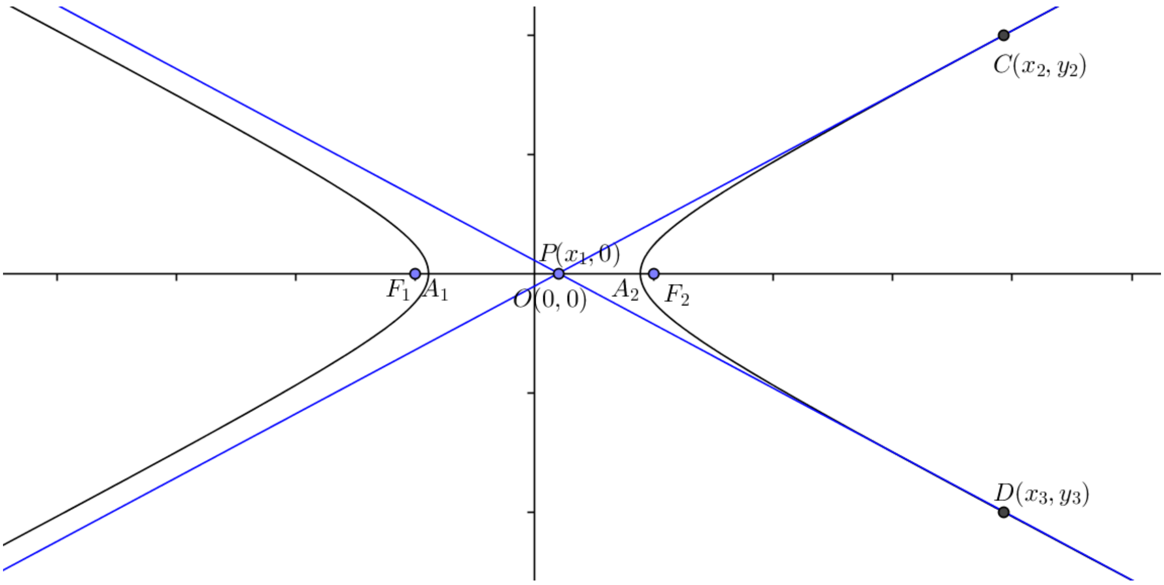
$$D\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1-y_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2},\frac{b^2\left(-a^2y_1-x_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}\right) \tag{6}$$

Sehingga semi kuasa titik di luar hiperbola dapat ditentukan dengan

$$K_{P_1}=|PC|^2=\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1+y_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}-x_1\right)^2+\left(\frac{b^2\left(-a^2y_1+x_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}-y_1\right)^2 \tag{7}$$

$$K_{P_2}=|PD|^2=\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1-y_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}-x_1\right)^2+\left(\frac{b^2\left(-a^2y_1-x_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}-y_1\right)^2 \tag{8}$$

2. Semi Kuasa Titik $P(x_1,0)$ yang Berada Pada Sumbu Simetri *x* di Luar Lengkungan Hiperbola



Gambar 4: Kedudukan titik $P(x_1,0)$ pada sumbu simetri *x* di luar lengkungan hiperbola

Misalkan titik $P(x_1,0)$ yang terletak pada sumbu simetri *x* di luar lengkungan hiperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Jika ditarik garis yang menyinggung hiperbola dari titik $P(x_1,0)$ maka diperoleh titik singgung $C(x_2,y_2)$ dan titik singgung $D(x_3,y_3)$. Akan ditentukan panjang $|PC|^2$ dan $|PD|^2$ yang merupakan semi kuasa titik terhadap hiperbola. Perhatikan Gambar 4.

Berdasarkan koordinat titik singgung pada persamaan (5) dan (6), maka diperoleh koordinat titik singgung $C(x_2,y_2)$ dan $D(x_3,y_3)$ terhadap hiperbola

$$C\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1+y_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2},\frac{b^2\left(-a^2y_1+x_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}\right)$$

Irma Fitri, Mashadi, Sri Gemawati. Semi Kuasa Titik Terhadap Hiperbola

$$C\left(\frac{a^2b^2x_1}{b^2{x_1}^2},\frac{b^2x_1h}{-b^2{x_1}^2}\right) \quad (9)$$

$$D\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1-y_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2},\frac{b^2\left(-a^2y_1-x_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}\right)$$

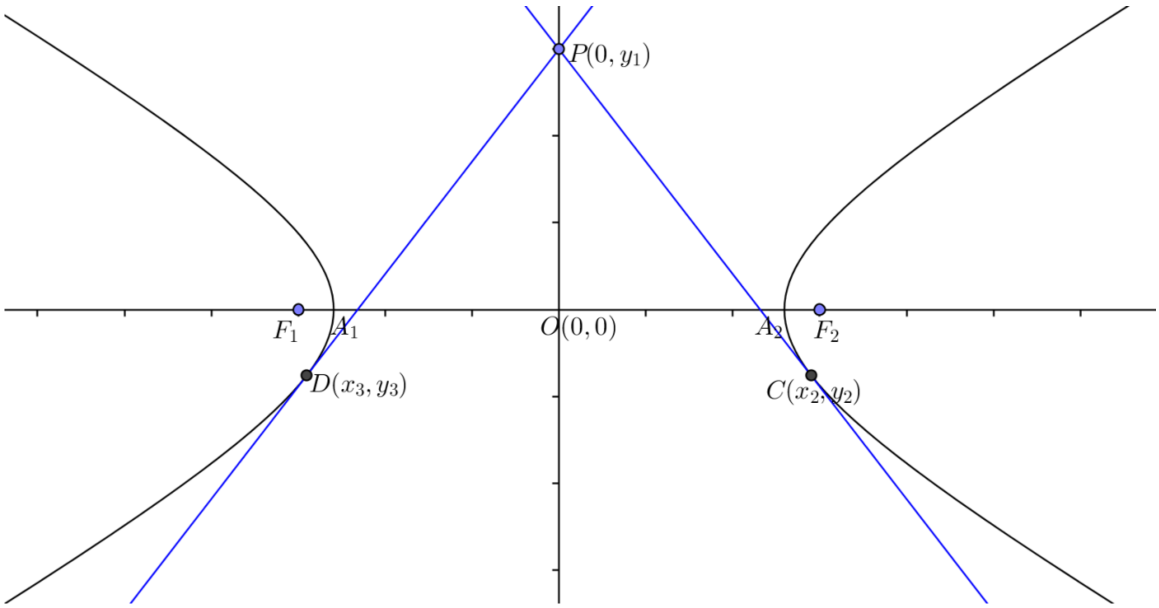
$$D\left(\frac{a^2b^2x_1}{b^2{x_1}^2},\frac{b^2x_1h}{b^2{x_1}^2}\right) \quad (10)$$

Sehingga semi kuasa titik pada sumbu simetri x di luar hiperbola dapat ditentukan dengan

$$K_P=|PC|^2=|PD|^2=\left(\frac{a^2b^2x_1}{b^2{x_1}^2}\right)^2+\left(\frac{b^2x_1h}{-b^2{x_1}^2}\right)^2 \quad (11)$$

3. Semi Kuasa Titik $P(0,y_1)$ yang Berada Pada Sumbu Simetri y di Luar Lengkungan Hiperbola

Misalkan titik $P(0,y_1)$ pada Gambar 5 berada pada sumbu simetri y di luar lengkungan hiperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Jika ditarik garis singgung dari titik $P(0,y_1)$ ke hiperbola, maka diperoleh titik singgung $C(x_2,y_2)$ dan titik singgung $D(x_3,y_3)$. Akan ditentukan panjang $|PC|^2$ atau $|PD|^2$ yang merupakan semi kuasa titik terhadap hiperbola.



Gambar 5: Kedudukan titik $P(0,y_1)$ pada sumbu simetri y di luar lengkungan hiperbola

Berdasarkan koordinat titik singgung pada persamaan (5) dan (6), maka diperoleh koordinat titik singgung terhadap hiperbola

$$C\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1+y_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2},\frac{b^2\left(-a^2y_1+x_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}\right)$$

$$C\left(\frac{a^2y_1h}{a^2{y_1}^2},\frac{-b^2a^2y_1}{a^2{y_1}^2}\right) \quad (12)$$

$$D\left(\frac{a^2\left(-b^2x_1-y_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2},\frac{b^2\left(-a^2y_1-x_1h\right)}{a^2{y_1}^2-b^2{x_1}^2}\right)$$

$$D\left(\frac{-a^2y_1h}{a^2{y_1}^2},\frac{-b^2a^2y_1}{a^2{y_1}^2}\right) \quad (13)$$

Sehingga semi kuasa titik pada sumbu simetri y di luar hiperbola dapat ditentukan dengan

$$K_P=|PC|^2=|PD|^2=\left(\frac{a^2y_1h}{a^2{y_1}^2}\right)^2+\left(\frac{-b^2a^2y_1}{a^2{y_1}^2}-y_1\right)^2 \quad (14)$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan penelitian ini dapat disimpulkan bahwa jika titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar lengkungan hiperbola, maka dapat ditentukan semi atau kuasa titik $P(x_1, y_1)$ terhadap hiperbola dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik.

Bagi pembaca yang tertarik dengan penelitian ini, disarankan agar membahas tentang semi kuasa titik terhadap hiperbola dengan bentuk persamaan umum yang dirotasikan sejauh sudut istimewa.

REFERENSI

[1] Coxeter, H.S.M. dan Greitzer, S.L., *Geometry Revisited*, MAA, Washington DC, 1967.H.S.M.Coxeter dan S.L.Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, Washington D C, 1967.

[2] Mashadi, *Geometri*, Pusbangdik UR, Pekanbaru, 2012.

[3] Sehatta Saragih, *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*, Pusbangdik UR, Pekanbaru, 2011.

[4] Siceloff, L. P., G. Wentworth dan D. E. Smith, *Analitic Geometry*, Ginn and Company, Boston, 1922.

[5] Weisstein, Eric W., “Hyperbola” From *MathWorld*-A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/Hyperbola.html

Irma Fitri, Mashadi, Sri Gemawati. Semi Kuasa Titik Terhadap Hiperbola