

## PERSAMAAN GARIS SINGGUNG PADA HIPERBOLA

Sri Handayani<sup>1</sup>, Mashadi<sup>2</sup>, Sri Gemawati<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, Universitas Riau  
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, Kampus Bina Widya, Simpang Baru, Pekanbaru, Riau 28293  
Email: sri.handayani.7489@gmail.com

<sup>2,3</sup> Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau  
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, Kampus Bina Widya, Simpang Baru, Pekanbaru, Riau 28293  
Email: mashadi.mat@gmail.com  
Email: gemawati.sri@gmail.com

### ABSTRAK

*Pada hiperbola, jika diambil sebarang titik, maka dapat ditarik garis yang menyinggung hiperbola. Pada tulisan ini dibahas alternatif lain menentukan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar hiperbola, koordinat titik singgung dan panjang garis singgung yang melalui suatu titik di luar hiperbola dengan menggunakan garis kutub*

**Kata Kunci:** Garis singgung, hiperbola

### ABSTRACT

*At hyperbole, if taken any point, it can be offensive line hyperbole. In this paper discussed about another alternative through the equation tangent through a point outside the hyperbole, the coordinat of the point of tangency of point outside the hyperbole by mean of line poles*

**Keywords:** Tangent through, hyperbole

### PENDAHULUAN

Persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada hiperbola telah banyak dibahas dalam buku seperti [Sehatta Saragih]. Padahal juga dapat dibuat persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar hiperbola. Saat ini [Sicelof, L., G. Wentworth dan D.E.S., ith., Sumadi, dkk] telah membahas tentang contoh persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar hiperbola dengan cara substitusi, namun belum ada alternatif penurunan rumus untuk menentukan koordinat titik singgung dan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar lengkungan hiperbola. Oleh karena itulah pada artikel ini dibahas tentang koordinat titik singgung dan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar hiperbola

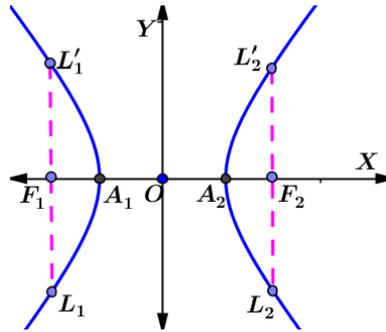
dengan menggunakan persamaan garis kutub.

### METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan teorema-teorema yang berlaku pada persamaan garis singgung pada hiperbola dan persamaan garis kutub pada hiperbola. Baik itu untuk menentukan koordinat titik singgung maupun untuk menentukan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar hiperbola.

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Hiperbola didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap. Kedua titik tertentu itu disebut titik fokus [Sicelof, L., G. Wentworth dan D.E.S., ith.].



Gambar 1: Unsur-unsur pada hiperbola

Ada beberapa unsur-unsur hiperbola seperti pada Gambar 2.2 [Weisstein, Eric W.].

1. Sumbu simetri

Gambar 2.2 adalah hiperbola yang memiliki dua buah sumbu simetri yaitu garis yang melalui titik-titik fokus  $F_1$  dan  $F_2$  serta garis yang melalui titik tengah  $F_1$  dan  $F_2$  yang tegak lurus  $F_1F_2$

- (i) Sumbu simetri yang melalui titik-titik fokus  $F_1$  dan  $F_2$  disebut sumbu utama atau sumbu transversal. Sumbu utama memotong hiperbola di titik  $A_1$  dan  $A_2$ , masing-masing disebut puncak hiperbola. Ruas garis  $A_1A_2$  disebut sumbu mayor hiperbola.
- (ii) Sumbu simetri yang melalui titik tengah  $F_1$  dan  $F_2$  serta tegak lurus  $F_1F_2$  disebut sumbu sekawan atau sumbu konjugasi. Suatu hiperbola tidak memotong sumbu sekawan dan disebut sumbu imajiner, sedangkan sumbu utama disebut sumbu nyata.

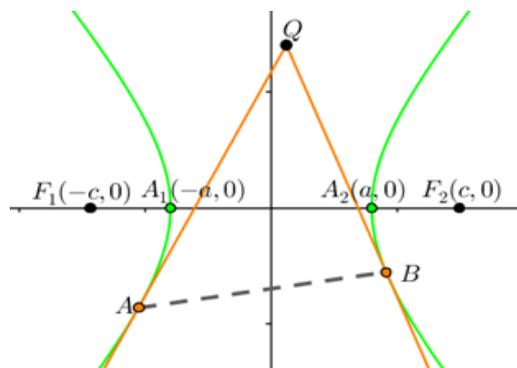
2. Titik pusat hiperbola

Sumbu utama dan sumbu sekawan berpotongan di titik  $O$  disebut titik pusat hiperbola.

3. *Latus rectum*

Garis yang melalui titik  $F_1$  dan tegak lurus sumbu utama memotong hiperbola di  $L_1$  dan  $L'_1$  memotong hiperbola di  $F_1$  dan ruas garis  $L_2$  dan  $L'_2$  memotong hiperbola di  $F_2$  masing-masing disebut *latus rectum* hiperbola.

Garis kutub pada hiperbola adalah garis yang menghubungkan dua titik singgung pada hiperbola. Diketahui hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$ . Jika ditarik garis singgung yang melalui suatu titik  $Q$  di luar hiperbola, maka akan diperoleh dua titik singgung pada hiperbola, misalkan titik singgung tersebut adalah titik  $A$  dan  $B$ , sehingga dapat ditarik garis yang menghubungkan titik  $A$  dan  $B$  seperti pada Gambar 2. Garis  $AB$  merupakan garis kutub pada hiperbola.



Gambar 2: Garis Kutub pada hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$

Persamaan garis singgung  $AQ$  yang melalui titik  $A$  pada hiperbola adalah

$$\frac{x_A x}{a^2} - \frac{y_B y}{b^2} = 1$$

Persamaan garis singgung  $AQ$  yang melalui titik  $Q$  adalah

$$\frac{x_A x_1}{a^2} - \frac{y_A y_1}{b^2} = 1$$

$$b^2 x_A x_1 - a^2 y_A y_1 = a^2 b^2 \quad (1)$$

Persamaan garis singgung  $BQ$  yang melalui titik  $B$  pada hiperbola, maka

$$\frac{x_B x}{a^2} - \frac{y_B y}{b^2} = 1$$

Persamaan garis singgung  $AQ$  yang melalui titik  $Q$ , sehingga

$$\frac{x_B x_1}{a^2} - \frac{y_B y_1}{b^2} = 1$$

$$b^2 x_B x_1 - a^2 y_B y_1 = a^2 b^2 \quad (2)$$

Eliminasi persamaan (1) dengan persamaan (2), sehingga didapat gradien garis  $AB$  yaitu

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \quad (3)$$

Persamaan garis  $AB$  adalah

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad (4)$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (4), diperoleh

$$y - y_A = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_A)$$

$$a^2 y y_1 - a^2 y_A y_1 = b^2 x_1 x - b^2 x_1 x_A$$

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1 x_A + a^2 y_1 y_A$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

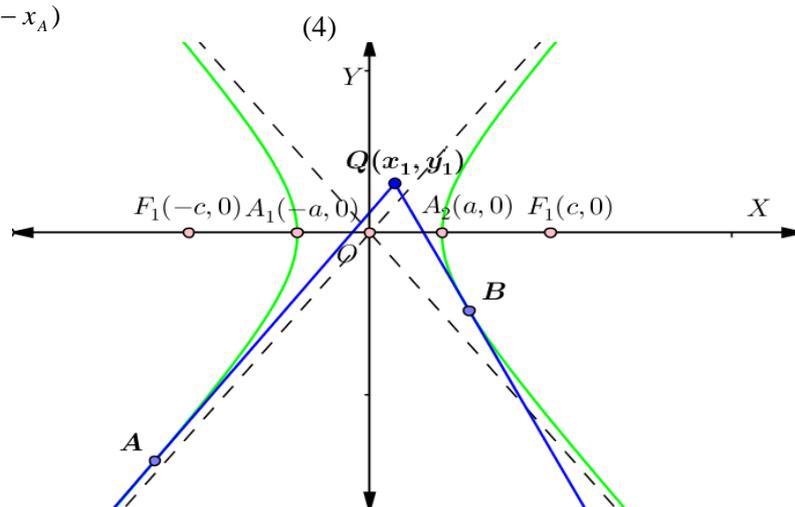
Jadi, persamaan garis kutub  $AB$  pada hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad (5)$$

Dengan analisis yang sama, didapat persamaan garis kutub pada hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(0,-c)$  dan  $F_2(0,c)$  yaitu

$$\frac{x_1 x}{b^2} - \frac{y_1 y}{a^2} = -1 \quad (6)$$

Pada hiperbola, jika diambil sebarang titik, maka dapat ditarik garis yang menyinggung hiperbola. Untuk menentukan koordinat titik singgung yang melalui suatu titik di luar lengkungan hiperbola, perhatikan terlebih dahulu Gambar 2



Gambar 2 : Garis singgung yang melalui titik  $Q(x_1, y_1)$  di luar lengkungan hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$

Misalkan titik  $Q(x_1, y_1)$  terletak di luar lengkungan hiperbola, dapat ditarik garis singgung dari titik  $Q(x_1, y_1)$  ke hiperbola. Langkah pertama menentukan koordinat titik singgung  $A(x_A, y_A)$  dan  $B(x_B, y_B)$  yang melalui suatu titik di luar lengkungan hiperbola adalah dengan menggunakan persamaan garis kutub pada hiperbola, diperoleh :

$$x = \frac{a^2 b^2 + a^2 y_1 y}{b^2 x_1} \quad (7)$$

substitusikan persamaan (7) ke persamaan hiperbola, diperoleh

$$(a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2) y^2 + (2a^2 b^2 y_1) y + a^2 b^4 - b^4 x_1^2 = 0$$

Nilai  $y$  dapat ditentukan dengan menggunakan rumus  $abc$ , sehingga diperoleh

$$y_{A,B} = \frac{-a^2 b^2 y_1 \pm b^2 x_1 \sqrt{a^2 y_1^2 + a^2 b^2 - b^2 x_1^2}}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}$$

misalkan

$$h = \sqrt{a^2 y_1^2 + a^2 b^2 - b^2 x_1^2} \quad (8)$$

sehingga diperoleh

$$y_{A,B} = \frac{b^2(-a^2 y_1 \pm x_1 h)}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2} \quad (9)$$

substitusikan persamaan (9) ke persamaan (7) diperoleh nilai  $x$  yaitu

$$x = \frac{a^2(-b^2 x_1 \pm y_1 h)}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}$$

sehingga diperoleh

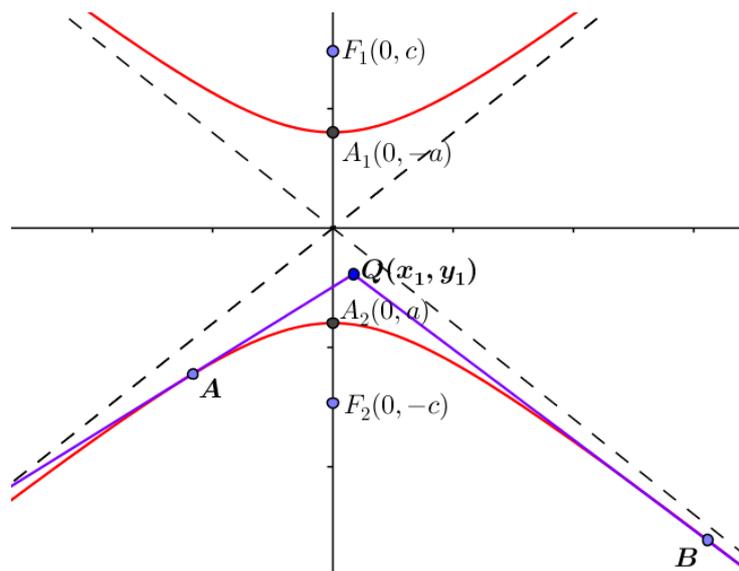
$$x_{A,B} = \frac{a^2(-b^2 x_1 \pm y_1 h)}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2} \quad (10)$$

Jadi koordinat titik singgung  $A(x_A, y_A)$  dan  $B(x_B, y_B)$  yang melalui suatu titik  $(x_1, y_1)$  di luar lengkungan hiperbola yang berpusat di  $(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$  yaitu

$$A\left(\frac{a^2(-b^2 x_1 + y_1 h)}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}, \frac{b^2(-a^2 y_1 + x_1 h)}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}\right)$$

dan

$$B\left(\frac{a^2(-b^2 x_1 - y_1 h)}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}, \frac{b^2(-a^2 y_1 - x_1 h)}{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}\right) \quad (11)$$



Gambar 3 : Garis singgung yang melalui titik  $Q(x_1, y_1)$  di luar lengkungan hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(0,-c)$  dan  $F_2(0,c)$

Dengan analisis yang sama, koordinat titik singgung  $A(x_A, y_A)$  dan  $B(x_B, y_B)$  yang melalui suatu titik  $Q(x_1, y_1)$  di luar lengkungan hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(0,-c)$  dan  $F_2(0,c)$  seperti pada Gambar 3 dapat ditentukan dengan

$$A\left(\frac{b^2(-a^2x_1 + y_1k)}{a^2x_1^2 - b^2y_1^2}, \frac{a^2(-b^2y_1 + x_1k)}{a^2x_1^2 - b^2y_1^2}\right)$$

dan

$$B\left(\frac{b^2(-a^2x_1 - y_1k)}{a^2x_1^2 - b^2y_1^2}, \frac{a^2(-b^2y_1 - x_1k)}{a^2x_1^2 - b^2y_1^2}\right) \quad (12)$$

Dengan

$$k = \sqrt{a^2x_1^2 + a^2b^2 - b^2y_1^2} \quad (13)$$

Untuk menentukan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik  $(x_1, y_1)$  di luar lengkungan hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$  seperti pada Gambar 1 dapat menggunakan persamaan (11). Substitusikan persamaan (11) ke persamaan (5), diperoleh

Persamaan garis singgung 1

$$y = \frac{(b^2x_1 + y_1h)x + a^2y_1^2 + b^2x_1^2}{(a^2y_1 + x_1h)}$$

dan persamaan garis singgung 2

$$y = \frac{(b^2x_1 - y_1h)x + a^2y_1^2 + b^2x_1^2}{(a^2y_1 - x_1h)} \quad (14)$$

Persamaan (14) merupakan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar lengkungan hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$ .

Dengan analisis yang sama, persamaan garis singgung yang melalui suatu titik  $(x_1, y_1)$  di luar lengkungan hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di

$F_1(0,-c)$  dan  $F_2(0,c)$  dapat ditentukan dengan

Persamaan garis singgung 1

$$y = \frac{(a^2x_1 + y_1k)x + b^2y_1^2 - a^2x_1^2}{(b^2y_1 + x_1k)}$$

dan persamaan garis singgung 2

$$y = \frac{(a^2x_1 - y_1k)x + b^2y_1^2 - a^2x_1^2}{(b^2y_1 - x_1k)} \quad (15)$$

■

## KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan penelitian ini dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan koordinat titik singgung dan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar lengkungan hiperbola dapat menggunakan konsep persamaan garis kutub.

Bagi pembaca yang tertarik dengan penelitian ini, disarankan agar membahas tentang koordinat titik, persamaan garis singgung, dan panjang garis singgung yang ditarik dari luar lengkungan hiperbola bentuk lain yang didapat dari hiperbola yang berpusat di  $O(0,0)$  fokus di  $F_1(-c,0)$  dan  $F_2(c,0)$  yang dirotasi sejauh  $45^\circ$

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sehatta Saragih, *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*, Pusbangdik Universitas Riau, 2011.
- [2] Sicelof, L. P., G. Wentworth dan D.E. S,ith., *Analitic Geometry*, Ginn and Company, Boston, 1992.
- [3] Sumadi, dkk, *Matematika SMU 3A*, Tiga Serangkai, Solo, 1996.
- [4] Weisstein, Eric W. "Hyperbola." From *MathWorld-Awolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/Hyoerbola.htm>. diakses 20 Maret 2015. Pk. 20.00