KARISMATIKA—ISSN : 2443-0366
TAHUN 1 VOL. 1 NO. 2 AGUSTUS 2015

PENGAJARAN TITIK INTERNAL PADA PENGUBINAN BERATURAN SECARA KOMBINATORIK

Sri Sukmawati[1], Sri Gemawati[2], M. D. H Gamal[3]
[1] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, MIPA Universitas Riau
Email: mma2708@yahoo.com
[2, 3] Dosen Jurusan Matematika, MIPA Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru, 28293
Email: gemawati.sri@gmail.com, mdhgamal@unri.ac.id

ABSTRAK

Artikel ini mengenai pembelajaran pengubinan beraturan yang meliputi pengubinan segitiga beraturn, pengubinan persegi dan pengubinan segi enam beratufran. Jumlah titik maksimum dari pengubinan beraturan dengan n-objek dapat diperoleh dengan memperhatikan pola ubin dan dengan menganalkisis titik internal. Selanjutnya, dengan menggunakan konsep aljabar SMA dan kombinasi, jumlah simpul, tepi, dan siklus dapat dihitung berdasarkan titik internal. Artikel ini untuk jumlah titik maksimum segitiga beraturan dan pengubinan persegi.
***Kata kunci**: pengubinan beraturan, objek, poligon beratufran, titik tepi, siklus, titik internal*

ABTRACT

This article studies the teaching of regular tessellations that includes regular triangle tessellation, square tesselation and regular hexagon tessellation. The number of maximum vertex of a regular tesselation with n-tilling can be obtained by taking into account the tiling patterns and by analysing the internal vertex. Furthermore, using the concept of high school algebra and combinatories, the number of vertices, edges and cycles can be enumerated based on the internal vertex. This article for The number of maximum vertex of a regular triangle and square tessellation.
***Keyword**: Regular tessellations, tillings, regular polygon, vertex, edges, cycles, internal vertex*

PENDAHULUAN

1. Pengubinnan Beraturan

Pengubinan (*tessellation*) adalah penyusunan daerah-daerah segi banyak yang menutupi sebuah bidang secara komplit yaitu tanpa penindihan ataupun celah. Salah satu pengubinan yang telah dikenal siswa sejak dini adalah pengubinan beraturan.

Definisi 1. Pengubinan beraturan (*regular tessellation*) adalah penyusunan satu macam bangun datar segi n (poligon) beraturan yang semuanya kongruen sehingga menutupi sebuah bidang secara komplit (David, 2015).

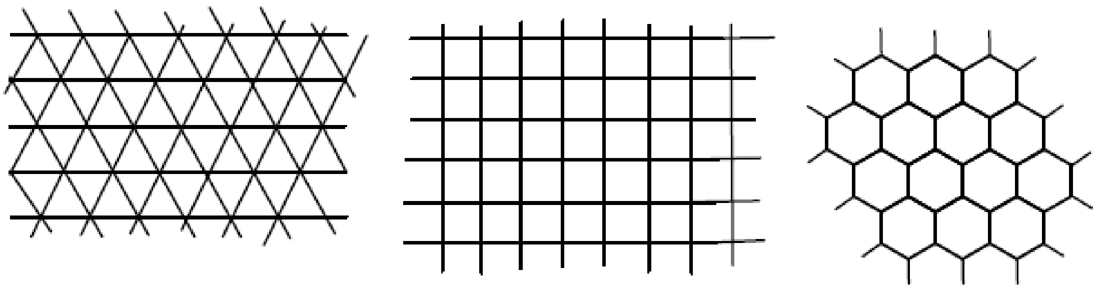
Dalam tulisan Swanson (2010) dikemukakan bahwa pengubinan beraturan terbagi 3 yaitu pengubinan segitiga sama sisi, pengubinan segiempat atau persegi, dan pengubinan segienam beraturan. Hal ini didasari dari teorema 1 berikut:

Teorema 1. beberapa poligon beraturan dapat bertemu disatu titik membentuk pengubinan jika dan hanya jika $\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_1-2}{n_1}+\cdots+\frac{n_1-2}{n_1}=2$ dengan $r\geq 3,\ n_1,n_2,n_3,\ldots,n_r,\geq 3$ dan $r,n_i\in \mathrm{Z}^+$

Dari teorema tersebut diperoleh 17 kombinasi poligon beraturan yang membentuk sebuah pengubinan dengan sudut interiornya dapat bertemu disatu titik (Swanson, 2010). Adapun 17 pengubinan tersebut yaitu :

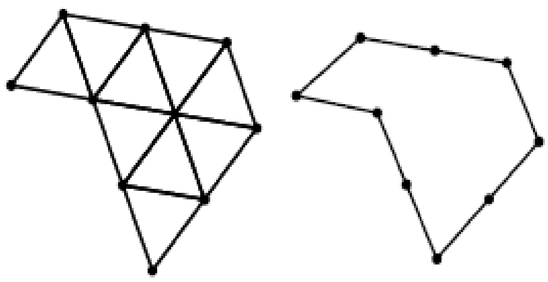
1. (3,3,3,3,3,3)
2. (3,3,3,3,6)
3. (3,3,3,4,4)
4. (3,3,4,12)
5. (3,3,6,6)
6. (3,4,4,6)
7. (3,7,42)
8. (3,8,24)
9. (3,9,18)
10. (3,10,15)
11. (3,12,12)
12. (4,4,4,4)
13. (4,5,20)
14. (4,6,12)
15. (4,8,8)
16. (5,5,10)
17. (6,6,6)

Akibat 1. Pengubinan beraturan yaitu pengubinan dengan satu macam poligon beraturan yang dapat bertemu disatu titik adalah pengubinan segitiga, pengubinan persegi dan pengubinan segienam.



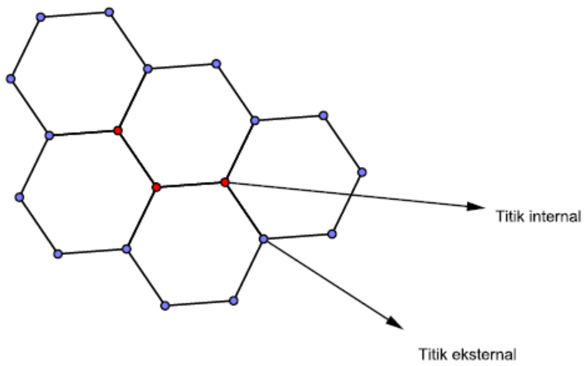
Gambar 1: Pengubinan Beraturan

2. Titik Internal Pengubinan Beraturan
Pengubinan poligon beraturan yang dapat bertemu di satu titik membentuk sebuah sistem pengubinan dengan titik tersebut di sebut titik internal. Titik-titik lainnya dan sisi-sisi yang membentuk lintasan sehingga membatasi sistem pengubinan disebut siklus. Berikut Gambar 1 adalah contoh pengubinan segitiga dengan siklusnya.



Gambar 2: Pengubinan segitiga dan siklusnya

Definisi 2. Titik-titik yang berada pada siklus disebut titik eksternal pengubinan dan titik-titik yang berada didalam siklus disebut titik internal sistem pengubinan (Gutman, 2007).



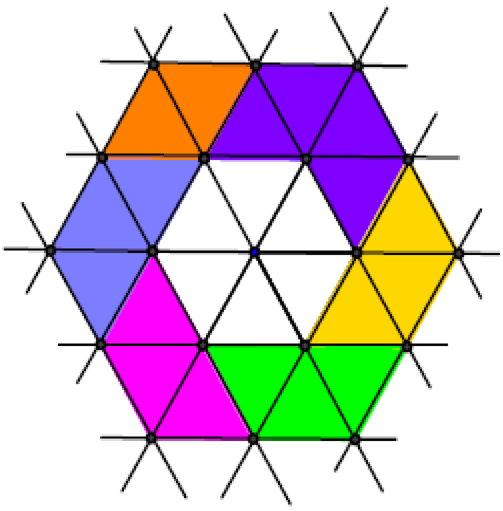
Gambar 3: Contoh pengubinan segienam dengan titik internal dan eksternal

Artikel ini dibatasi dengan membahas jumlah maksimum titik internal pengubinan beraturan khususnya pengubinan segitiga yang dilakukan secara sederhana dari susunan pola-pola ubin secara kombinatorik sehingga dapat dengan mudah dipahami oleh siswa. Materi ini lebih dikhususkan untuk matematika pengayaan dan diharapkan dapat membantu siswa mengembangkan ide kreatifnya dalam memecahkan masalah-masalah yang berkaitan dengan pengubinan.

Hasil dan Pembahasan

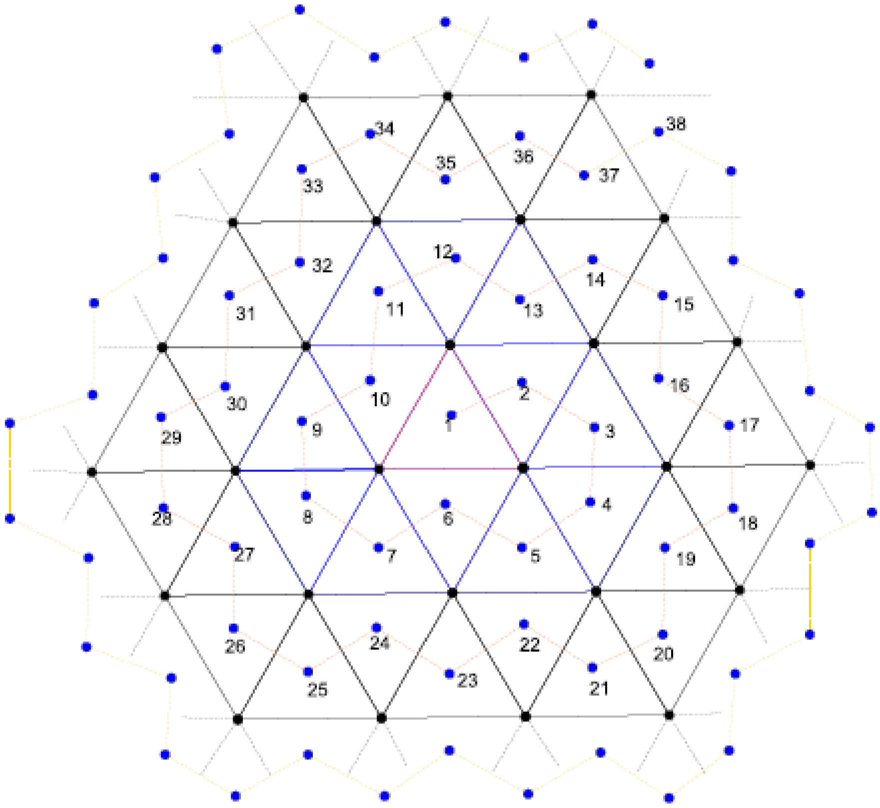
Titik Internal Maksimum Pengubinan Segitiga

Sebuah titik internal pada pengubinan segitiga diperlukan minimal 6 segitiga. Jumlah titik internal maksimum diperoleh dengan menyusun ubin-ubin segitiga dengan jumlah minimal. Contohnya untuk 2 titik internal disebut maksimum jika jumlah ubinnya 10 segitiga. Untuk seterusnya setiap penambahan 3 ubin akan membentuk satu titik internal baru hingga 22 ubin. Untuk penambahan selanjutnya diperlukan 2 ubin yang dapat dilihat pada gambar 4.



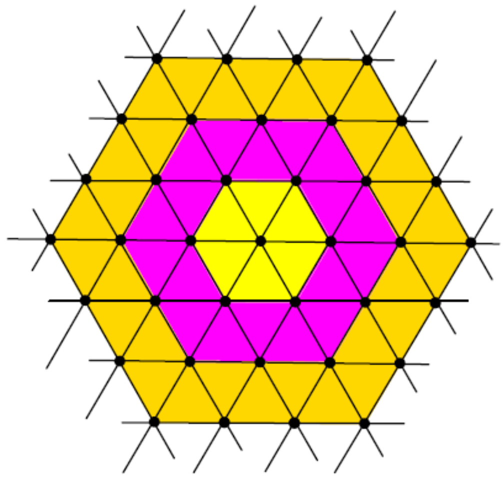
Gambar 4: Pengubinan 24 ubin segitiga untuk titik internal maksimum

Dari susunan pola-pola tersebut secara kombinatorik didapat pola penyusunan terbaik ubin segitiga agar jumlah titik internal maksimum yaitu seperti pada Gambar 5.



Gambar 5: Pola susunan pengubinan segitiga untuk jumlah maksimum titik internal

Jumlah titik internal maksimum pengubinan segitiga berdasarkan pola diatas dapat dimulai dari pengubinan segitiga yang membentuk hexagon beraturan seperti pada Gambar 6. Jika n adalah jumlah ubin maka pengubinan segitiga yang membentuk hexagon beraturan adalah $n = 6\left(\sum_{i=0}^{p} 2i + 1\right), p \in \mathrm{Z}^{+}$



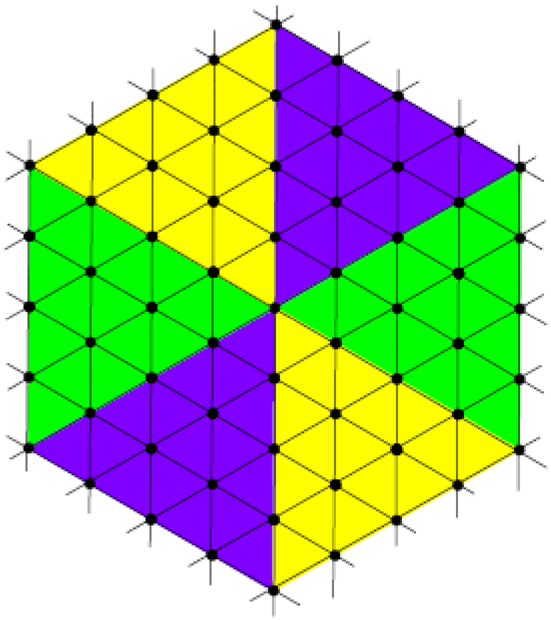
Gambar 6: Pengubinan segitiga membentuk hexagon beraturan

Misalkan v_{i-maks} adalah jumlah titik internal maksimum maka diperoleh barisan titik internalnya $S_n = (1,7,19, \dots)$ dengan $n \geq 6$ maka diperoleh persamaan jumlah titik internal maksimumnya sebagai berikut :

$v_{i-maks} = 1 + 6\left(\sum_{i=0}^{p} i\right)$ (1)

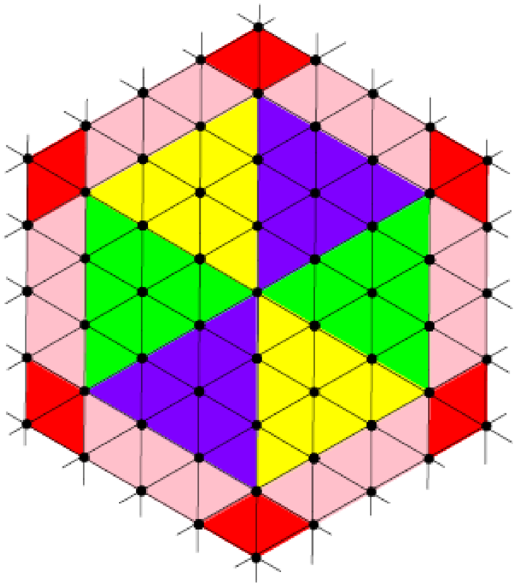
Bukti. Akan dibuktikan persamaan (1) dengan induksi matematika.

- Akan dibuktikan persamaan (1) berlaku untuk $p = 1$
  Untuk $p = 1$ maka $n = 6\left(\sum_{i=0}^{p} 2i + 1\right) = 6(1 + 3) = 24$ ubin segitiga
  Berdasarkan pola Gambar 6 susunan untuk jumlah titik internalnya maka titik internal maksimumnya berjumlah 7 seperti pada Gambar 5.
  $$v_{i-maks} = 7$$
  $$v_{i-maks} = 1 + 6\left(\sum_{i=0}^{1} i\right)$$
  Sehingga terbukti persamaan (1) berlaku untuk $p = 1$
- Misalkan terbukti persamaan (1) berlaku untuk $p = k$ maka akan dibuktikan berlaku untuk $p = k + 1$
  Untuk $p = k$ maka $n = 6\left(\sum_{i=0}^{p} 2i + 1\right) = 6\left(\sum_{i=0}^{k} 2i + 1\right)$ sehingga $n = 6(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1))$ berlaku
  $$v_{i-maks} = 1 + 6\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)$$
  $$v_{i-maks} = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + k)$$
  Untuk $p = k + 1$ merupakan pengubinan segitiga yang membentuk hexagon beraturan dengan penambahan disekelilingnya. Perhatikan Gambar 7. Setiap pengubinan segitiga yang membentuk hexagon beraturan dapat dibentuk 6 buah segitiga sama sisi.



Gambar 7: Bentuk 6 segitiga sama sisi dari pengubinan segitiga yang berbentuk hexagon

Berdasarkan Gambar 7 jumlah setiap sisi segitiga tersebut adalah $2k + 1$. Selanjutnya setiap penambahan nilai k menjadi $k + 1$ maka artinya penambahan segitiga disekeliling pengubinan. Jumlah segitiga yang ditambahkan dari pola nilai k adalah $6(2k + 1) + 6(2)$ dapat dilihat pada Gambar 8. Sehingga diperoleh jumlah titik internal yang bertambah adalah $6(k + 1)$.



Gambar 8: Penambahan nilai k untuk pengubinan segitiga yang membentuk hexagon

Sehingga untuk $p = k + 1$ maka

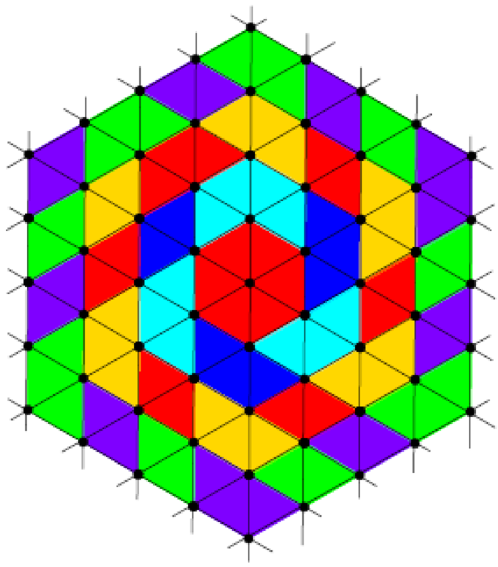
$$n = 6\left(\sum_{i=0}^{k+1} 2 + 1\right)$$
$$n = 6(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) + (2k + 3))$$
$$n = 6(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1)) + 6(2k + 3)$$
$$n = 6(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1)) + 6(2k + 1) + 6(2)$$

Diketahui untuk $n = 6(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1)) + 6(2k + 1))$ titik internal maksimumnya $v_{i-maks} = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + k)$ dan setiap penambahan $n = 6(2k + 1) + 6(2)$ segitiga pada pengubinan segitiga yang membentuk hexagon beraturan akan menambah $6(k + 1)$ titik internal sehingga :

$$v_{i-maks} = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + k) + 6(k + 1)$$
$$v_{i-maks} = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1))$$
$$v_{i-maks} = 1 + 6\left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)$$
$$v_{i-maks} = 1 + 6\left(\sum_{i=0}^{p} i\right)$$

Sehingga terbukti persamaan (1) terbukti untuk $p = k + 1$ maka persamaan (1) berlaku untuk $\forall p \in Z^{+}$.

Untuk jumlah ubin segitiga lainnya dapat ditentukan jumlah titik internal maksimumnya dengan membentuk jumlah ubin menjadi $n = 6\left(\sum_{i=0}^{p} 2i + 1\right) + s$. Berdasarkan pola Gambar 5 yang merupakan susunan ubin segitiga untuk jumlah maksimum titik internal maka Gambar 9 menunjukkan penambahan setiap sebuah titik internal dari 2 segitiga dan 3 segitiga. Dengan $6 < n < 24$ atau $p = 0$ penambahan ubin berikutnya adalah $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2$. Sedangkan untuk $p = 1$ penambahan ubin berikutnya $(3) + (3 + 2) + (3 + 2) + (3 + 2) + (3 + 2) + (3 + 2 + 2)$



Gambar 9: Penambahan sebuah titik internal dengan 2 dan 3 segitiga

Untuk $p = k$ maka setiap penambahan sebuah titik internal diperoleh dengan penambahan setiap suku dari 2 atau 3 segitiga dengan pola $(3 + 2(k-1) + (3+2p) + (3+2p) + (3+2p) + (3+2p) + (3 + 2(p+1))$.

Contoh 1. Berapa jumlah maksimum titik internal yang dapat dibentuk oleh 31 ubin segitiga?
Penyelesaian : $n = 31 = 6\left(\sum_{i=0}^{1} 2i + 1\right) + s = 24 + 7$ karena $s = 7$ maka penambahannya adalah $(3 + 2(1-1)) + 3 + 1 = 3 + 3 + 1$. Setiap penambahn 2 atau 3 segitiga adalah menambah sebuah titik internal maka jumlah titik internal maksimum untuk 31 ubin segitiga adalah $v_{i-maks} = 1 + 6\left(\sum_{i=0}^{1} i\right) + 2 = 9$ titik internal.

KESIMPULAN

Pada tulisan ini telah dibahas bagaimana menentukan pola-pola penyusunan ubin poligon beraturan khususnya segitiga dan persegi agar memperoleh titik internal maksimum. Untuk pengubinan segitiga dapat diperoleh dari bentuk penyusunan sederhananya yang membentuk pola hexagon beraturan. Sedangkan untuk pengubinan persegi diperoleh dari bentuk penyusunan persegi yang lebih besar. Sehingga siswa dapat memahami bagaimana memperoleh bentuk umum titik internal maksimum dari suatu pengubinan beraturan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] David, B.S. *How to Draw a Tessellation*, Part One, www.dbsullivan.com, diakses tanggal 3 Februari 2015, pukul 21.13 WIB.

[2] I.Gutman, *Hexagonal Systems. A Chemistry-Motivated Excursion To Combinatorial Geometry*, The Teaching of Mathematics, 2007

[3] I. Swanson, *Quilting Semi-regular Tesselatios Crafting By Concepts*, A.K. Peters, New York, 2010.