PENGEMBANGAN TEOREMA CEVA DAN TEOREMA MENELAUS PADA SEGIEMPAT

Nurahmi [1*], Mashadi [2], Hasriati [2]

[1] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya 28293 Indonesia

email : nurahmifaqih@yahoo.co.id

ABSTRAK

Teorema Ceva dan Teorema Menelaus pada umumnya dibahas pada sembarang segitiga. Pada tulisan ini dibahas pengembangan teorema Ceva dan teorema Menelaus pada segiempat dalam berbagai kasus. Pada teorema Ceva dibahas kasus yaitu berpotongan di satu titik yang berada di luar segiempat konveks dan nonkonveks , sedangkan pada teorema Menelaus dibahas untuk kasus segiempat nonkonveks.

Kata Kunci *: Segiempat, Teorema Ceva, dan Teorema Menelaus.*

PENDAHULUAN

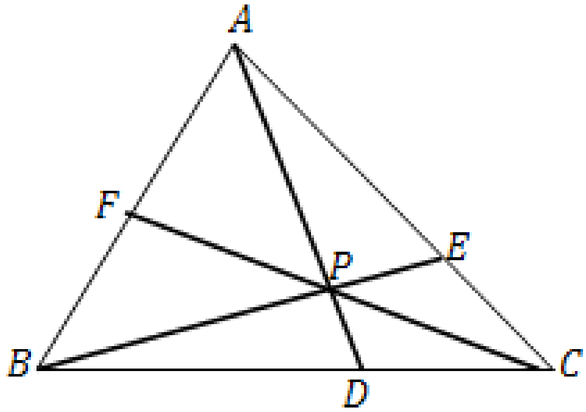
Teorema Ceva pada segitiga digunakan untuk menunjukkan tiga buah garis berpotongan di satu titik (konkuren) [1, 2, 4, 6, 7, 9], kasus lain dari teorema Ceva adalah tiga buah garis juga berpotongan di satu titik yang berada di luar segitiga, sedangkan teorema Menelaus pada segitiga digunakan untuk menunjukkan kolinearitas dari dua titik yang berada pada penggal garis (sisi-sisi segitiga) dan satu titik lagi berada pada perpanjangan sisi segitiga [1, 2, 3, 5, 6, 7],.Selanjutnya teorema Ceva dan teorema Menelaus tidak hanya berlaku pada segitiga, namun bisa saja berlaku segiempat [2]. Teorema Ceva pada segiempat yang sudah dibahas yaitu berpotongan di satu titik yang berada didalam segiempat konveks. Pada tulisan ini dibahas teorema Ceva pada segiempat untuk titik yang berada di luar segiempat konveks dan nonkonveks. Sedangkan teorema Menelaus pada segiempat yang sudah dibahas adalah dua buah titik yang berada pada sisi-sisi segiempat konveks dan dua titik yang lain berada pada perpanjangannya [8]. Selanjutnya pada tulisan ini dibahas teorema Menelaus pada segiempat untuk kasus empat buah titik yang berada pada sisi-sisi segiempat nonkonveks .

Teorema Ceva dan Menelaus pada Segitiga

Teorema 1. (Teorema Ceva) Jika *D*,*E* dan *F* masing-masing adalah titik pada sisi *BC*, *CA* dan *AB* pada segitiga *ABC*, maka garis *AD*, *BE*, dan *CF* adalah konkuren (berpotongan disatu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=1$$

Perhatikan Gambar 1 berikut,

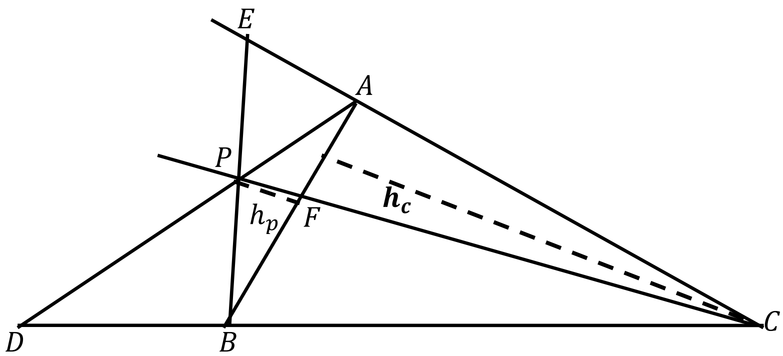


Gambar 1: Garis *AD*, *BE* dan *CF* konkuren di titik *P*

Teorema 2. Jika *D*,*E* adalah titik pada perpanjangan sisi *BC*, *CA* dan *F* adalah titik pada sisi *AB* pada segitiga *ABC*, maka garis *AD*, *BE*, dan *CF* adalah konkuren (berpotongan disatu titik) jika dan hanya jika:

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=1$$

Perhatikan Gambar 2.

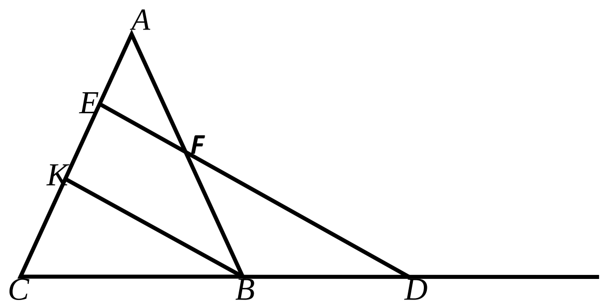


Gambar 2: Ketiga garis AD, BE, CF berpotongan di titik P.

Teorema 3. (Teorema Menelaus) Jika titik D terletak pada perpanjangan sisi BC ,Titik E, F masing-masing terletak pada sisi AB dan AC pada segitiga ABC, maka titik D, E dan F adalah segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = -1$$

Perhatikan Gambar 3 berikut:



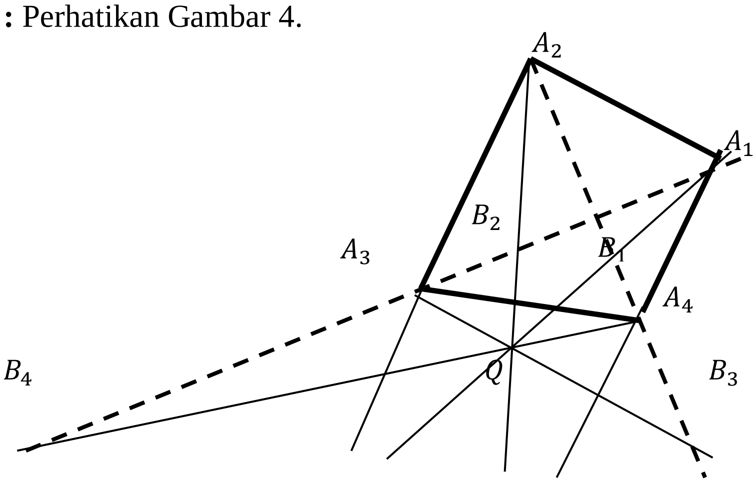
Gambar 3: Titik D, E dan F adalah segaris

TEOREMA CEVA DAN MENELAUS PADA SEGIEMPAT

Teorema 4 : Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ adalah segiempat konveks, titik Q berada di luar segiempat. Misalkan B_1, B_2, B_3, B_4 adalah titik potong dari garis QA_1 dengan A_2A_4, garis QA_2 dengan A_1A_3, garis QA_3 dengan perpanjangan A_2A_4, dan garis QA_4 dengan perpanjangan A_1A_3, maka $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ berpotongan di titik Q jika

$$\frac{A_4B_1}{B_1A_2}\frac{A_1B_2}{B_2A_3}\frac{A_2B_3}{B_3A_4}\frac{A_3B_4}{B_4A_1}=1. \qquad (1)$$

Bukti : Perhatikan Gambar 4.



Gambar 4: A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, dan A_4B_4 berpotongan di titik Q.

Misalkan $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ berpotongan di titik Q, akan ditunjukkan persamaan (1) berlaku.

Dengan menggunakan perbandingan luas pada segitiga, perhatikan ΔQA_1A_4 dan ΔQA_1A_2 dengan sisi alas QA_1 maka diperoleh:

$$\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2}=\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QB_1A_4}\frac{L\Delta QB_1A_4}{L\Delta QB_1A_2}\frac{L\Delta QB_1A_2}{L\Delta QA_1A_2},$$

$$\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2}=\frac{QA_1}{QB_1}\frac{B_1A_4}{B_1A_2}\frac{QB_1}{QA_1},$$

$$\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2}=\frac{A_4B_1}{B_1A_2}. \qquad (2)$$

Kemudian untuk ΔQA_1A_2 dan ΔQA_2A_3 dengan sisi alas QA_2 diperoleh

$$\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3}=\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QB_2A_1}\frac{L\Delta QB_2A_1}{L\Delta QB_2A_3}\frac{L\Delta QB_2A_3}{L\Delta QA_2A_3},$$

$$\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3}=\frac{QA_2}{QB_2}\frac{B_2A_1}{B_2A_3}\frac{QB_2}{QA_2},$$

$$\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3}=\frac{A_1B_2}{B_2A_3}. \qquad (3)$$

Selanjutnya untuk ΔQA_2A_3 dan ΔQA_3A_4 dengan sisi alas QA_3 diperoleh

$$\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4}=\frac{L\Delta A_3QA_2}{L\Delta A_3B_3A_2}\frac{L\Delta A_3B_3A_2}{L\Delta A_3B_3A_4}\frac{L\Delta A_3B_3A_4}{L\Delta A_3QA_4},$$
$$\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4}=\frac{A_3Q}{A_3B_3}\frac{B_3A_2}{B_3A_4}\frac{A_3B_3}{A_3Q},$$
$$\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4}=\frac{A_2B_3}{B_3A_4}. \tag{4}$$

Kemudian untuk ΔQA_3A_4 dan ΔQA_4A_1 dengan sisi alas QA_4 diperoleh

$$\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1}=\frac{L\Delta A_4QA_3}{L\Delta A_4B_4A_3}\frac{L\Delta A_4B_4A_3}{L\Delta A_4B_4A_1}\frac{L\Delta A_4B_4A_1}{L\Delta A_4QA_1},$$
$$\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1}=\frac{A_4Q}{A_4B_4}\frac{B_4A_3}{B_4A_1}\frac{A_4B_4}{A_4Q},$$
$$\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1}=\frac{A_3B_4}{B_4A_1}. \tag{5}$$

Bila persamaan (2),(3),(4) dan (5) dikalikan masing-masing ruas kanan dan ruas kiri maka diperoleh

$$\frac{A_4B_1}{B_1A_2}\frac{A_1B_2}{B_2A_3}\frac{A_2B_3}{B_3A_4}\frac{A_3B_4}{B_4A_1}=\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2}\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3}\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4}\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1},$$
$$\frac{A_4B_1}{B_1A_2}\frac{A_1B_2}{B_2A_3}\frac{A_2B_3}{B_3A_4}\frac{A_3B_4}{B_4A_1}=1.$$

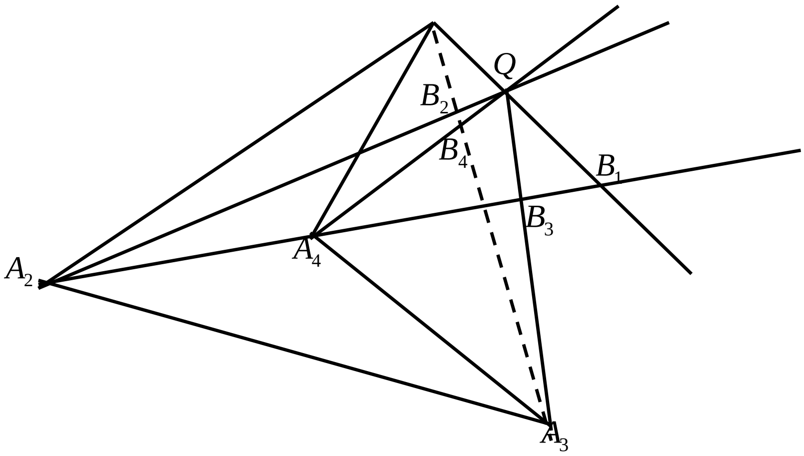
Persamaan (1) terpenuhi . ■

Teorema 5: Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ adalah segiempat nonkonveks, titik Q berada di luar segiempat. Misalkan B_1, B_2, B_3, B_4 adalah titik potong dari garis QA_1 dengan perpanjangan garis A_2A_4, garis QA_2 dengan A_1A_3, garis QA_3 dengan perpanjangan garis A_2A_4, dan garis QA_4 dengan A_1A_3, maka $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ berpotongan di titik Q jika

$$\frac{A_4B_1}{B_1A_2}\frac{A_1B_2}{B_2A_3}\frac{A_2B_3}{B_3A_4}\frac{A_3B_4}{B_4A_1}=1. \tag{6}$$

Bukti : Perhatikan Gambar 5.

A_1



Gambar 5: Garis $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ berpotongan di titik Q

Misalkan $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ berpotongan di titik Q, akan ditunjukkan persamaan (6) berlaku. Dengan menggunakan perbandingan luas pada segitiga, perhatikan ΔQA_1A_4 dan ΔQA_1A_2 dengan sisi alas QA_1 maka diperoleh

$$\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2} = \frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QB_1A_4}\frac{L\Delta QB_1A_4}{L\Delta QB_1A_2}\frac{L\Delta QB_1A_2}{L\Delta QA_1A_2},$$

$$\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2} = \frac{QA_1}{QB_1}\frac{B_1A_4}{B_1A_2}\frac{QB_1}{QA_1},$$

$$\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2} = \frac{A_4B_1}{B_1A_2}. \tag{7}$$

Kemudian untuk ΔQA_1A_2 dan ΔQA_2A_3 dengan sisi alas QA_2 diperoleh

$$\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3} = \frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QB_2A_1}\frac{L\Delta QB_2A_1}{L\Delta QB_2A_3}\frac{L\Delta QB_2A_3}{L\Delta QA_2A_3},$$

$$\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3} = \frac{QA_2}{QB_2}\frac{B_2A_1}{B_2A_3}\frac{QB_2}{QA_2},$$

$$\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3} = \frac{A_1B_2}{B_2A_3}. \tag{8}$$

Selanjutnya untuk ΔQA_2A_3 dan ΔQA_3A_4 dengan sisi alas QA_3 diperoleh

$$\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4} = \frac{L\Delta A_3QA_2}{L\Delta A_3B_3A_2}\frac{L\Delta A_3B_3A_2}{L\Delta A_3B_3A_4}\frac{L\Delta A_3B_3A_4}{L\Delta A_3QA_4},$$

$$\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4} = \frac{A_3Q}{A_3B_3}\frac{B_3A_2}{B_3A_4}\frac{A_3B_3}{A_3Q},$$

$$\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4}=\frac{A_2B_3}{B_3A_4}. \tag{9}$$

Kemudian untuk ΔQA_3A_4 dan ΔQA_4A_1 dengan sisi alas QA_4 diperoleh

$$\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1}=\frac{L\Delta A_4QA_3}{L\Delta A_4B_4A_3}\frac{L\Delta A_4B_4A_3}{L\Delta A_4B_4A_1}\frac{L\Delta A_4B_4A_1}{L\Delta A_4QA_1},$$

$$\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1}=\frac{A_4Q}{A_4B_4}\frac{B_4A_3}{B_4A_1}\frac{A_4B_4}{A_4Q},$$

$$\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1}=\frac{A_3B_4}{B_4A_1}. \tag{10}$$

Bila persamaan (7), (8), (9) dan (10) dikalikan ruas kanan dan kiri maka diperoleh

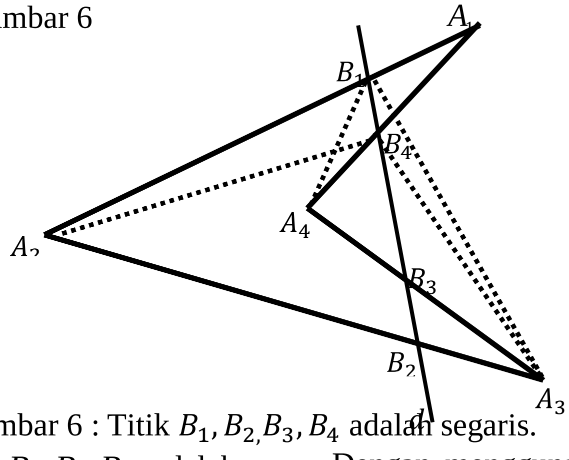
$$\frac{A_4B_1}{B_1A_2}\frac{A_1B_2}{B_2A_3}\frac{A_2B_3}{B_3A_4}\frac{A_3B_4}{B_4A_1}=\frac{L\Delta QA_4A_1}{L\Delta QA_1A_2}\frac{L\Delta QA_1A_2}{L\Delta QA_2A_3}\frac{L\Delta QA_2A_3}{L\Delta QA_3A_4}\frac{L\Delta QA_3A_4}{L\Delta QA_4A_1},$$

$$\frac{A_4B_1}{B_1A_2}\frac{A_1B_2}{B_2A_3}\frac{A_2B_3}{B_3A_4}\frac{A_3B_4}{B_4A_1}=1. \qquad \blacksquare$$

Teorema 6: Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ adalah segiempat sembarang (non konveks), dan sebuah garis misalnya garis d memotong sisi $A_1A_{2,}A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ masing-masing pada titik B_1, B_2, B_3, dan B_4 jika dan hanya jika:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1. \tag{11}$$

Bukti : Perhatikan Gambar 6



Gambar 6 : Titik $B_1, B_{2,}B_3, B_4$ adalah segaris.

Misalkan titik B_1, B_2, B_3, B_4 adalah segaris, akan ditunjukkan persamaan (11) berlaku.

Dengan menggunakan perbandingan luas segitiga, misalkan B_1B_2 sebagai alas segitiga. Perhatikan $\Delta B_1B_2A_1$ dan $\Delta B_1B_2A_2$ maka diperoleh

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_1}{L\Delta B_1B_2A_2} = \frac{A_1B_1}{B_1A_2} \tag{12}$$

Kemudian perhatikan $\Delta\, B_1B_2A_2$ dan $\Delta\, B_1B_2A_3$ diperoleh

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_2}{L\Delta B_1B_2A_3} = \frac{L\Delta B_1B_2A_2}{L\Delta B_1B_4A_2}\cdot\frac{L\Delta B_1B_4A_2}{L\Delta B_1B_4A_3}\cdot\frac{L\Delta B_1B_4A_3}{L\Delta B_1B_2A_3}$$

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_2}{L\Delta B_1B_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_4}\cdot\frac{B_4A_2}{B_4A_3}\cdot\frac{B_1B_4}{B_1B_2}$$

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_2}{L\Delta B_1B_2A_3} = \frac{A_2B_4}{B_4A_3} \tag{13}$$

Selanjutnya dari $\Delta\, B_1B_2A_3$ dan $\Delta\, B_1B_2A_4$ maka diperoleh

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_3}{L\Delta B_1B_2A_4} = \frac{L\Delta B_1B_2A_3}{L\Delta B_1B_3A_3}\cdot\frac{L\Delta B_1B_3A_3}{L\Delta B_1B_3A_4}\cdot\frac{L\Delta B_1B_3A_4}{L\Delta B_1B_2A_4}$$

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_3}{L\Delta B_1B_2A_4} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3}\cdot\frac{B_3A_3}{B_3A_4}\cdot\frac{B_1B_3}{B_1B_2}$$

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_3}{L\Delta B_1B_2A_4} = \frac{A_3B_3}{B_3A_4} \tag{14}$$

Dari $\Delta\, B_1B_2A_4$ dan $\Delta\, B_1B_2A_1$ maka diperoleh

$$\frac{L\Delta B_1B_2A_3}{L\Delta B_1B_2A_4} = \frac{A_4B_2}{B_2A_1} \tag{15}$$

Bila persamaan (12),(13),(14), dan (15) dikalikan ruas kanan dan ruas kiri maka diperoleh:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_1} = \frac{L\Delta B_1B_2A_1}{L\Delta B_1B_2A_2}\cdot\frac{L\Delta B_1B_2A_2}{L\Delta B_1B_2A_3}\cdot\frac{L\Delta B_1B_2A_3}{L\Delta B_1B_2A_4}\cdot\frac{L\Delta B_1B_2A_4}{L\Delta B_1B_2A_1}$$

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_4}{B_4A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_2}{B_2A_1} = 1$$

Persamaan (11) terpenuhi ■

Kesimpulan

Dari hasil artikel ini dapat disimpulkan bahwa Teorema Ceva dan teorema Menelaus berlaku pada segiempat. Teorema Ceva dikembangkan dalam beberapa kasus yaitu berpotongan disatu titik yang berada di luar segiempat konveks dan nonkonveks yang dapat dibuktikan dengan perbandingan luas segitiga. Sedangkan teorema Menelaus dikembangkan pada kasus yaitu garis transversal memotong empat sisi segiempat yang dibuktikan dengan perbandingan luas pada segitiga.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Benitez. J. 2007. A Unified Proof of Ceva and Menelaus'Theorems Using Projective Geometry. *Journal for Geometry and Grafichs*. Vol: 11. 39-44.

[2] Grunbaum, B & Shephard G. C. 1995. Ceva Menelaus and the Area Principle, *Mathematics Magazine* Vol: 68. 254-260.

[3] Gogeometry. 1 hal. http :// www.gogeometry.com/ Menelaus1. htm. 24 November 2014. pk. 09.06

[4] Gogeometry. 1 hal. http :// www.gogeometry.com/ Ceva. htm. 24 November 2014. Pk. 09.01

[5] Hoo, H. K dan Meng, K. K.1996. On Menelaus Theorem, *Mathematical Medley*. Vol: 1. 19-23.

[6] Mashadi. 2012. *Buku Ajar Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.

[7] Silvester, J. R. 2000. Ceva = $(\text{Menelaus})^2$. *The Mathematical Gazette*. 84:268-271

[8] Smarandache F,*A* Self Reccurrence Method for Generalizing known Scientific Results. http:// arxiv.org/ftp/math/papers/0611 /0611960.24 November 2014.

[9] Yiu, P. 2001. *Introduction to the Geometry of the triangle*. Department of Mathematics Florida Atlantic University.