KARISMATIKA – ISSN : 2443 –0366
TAHUN 1 VOL. 1 NO. 2 AGUSTUS 2015

MENENTUKAN SUBGRAF BICLIQUE MAKSIMAL DENGAN PASANGAN POLA TERTUTUP PADA GRAF KNESER

Hanna Dewi Marina Hutabarat
Mahasiswa PPS Matematika USU Medan
e-mail : h4de121na@yahoo.com

ABSTRAK

Subgraf biclique maksimal, sering juga disebut sebagai subgraf bipartisi komplit maksimal dapat dimodelkan ke banyak aplikasi dari banyak bidang ilmu. Dari hubungan antara subgraf biclique maksimal dengan pola tertutup dari suatu matriks adjacency pada graf tidak berarah dan tanpa lup G diperoleh : (1). Banyak pola tertutup pada matriks adjacency G adalah genap; dan (2). Banyak dari pola tertutup adalah tepat dua kali banyak subgraf biclique maksimal dari G. Pada graf khusus seperti halnya graf Kneser terdapat pola khusus sehingga bisa ditentukan jumlah subgraf biclique maksimalnya. Subgraf biclique maksimal dari graf Kneser dapat ditentukan dengan pola tertutup dari matriks adjacencynya.

Kata kunci : Subgraf biclique maksimal, graf Kneser, pola tertutup.

Pendahuluan

Ketertarikan dalam bidang graf dan aplikasinya sangat berkembang dengan pesat, terlebih lagi dalam kaitannya dengan penggunaannya sebagai model diberbagai bidang seperti dalam penelitian matematika, teknik elektronik, pemprograman komputer, administrasi bisnis, sosiologi, ekonomi, marketing, biologi dan jaringan komunikasi. Pada dasarnya, banyak masalah yang dapat dimodelkan dengan maksimal biclique subgraf yang dibentuk dari mengelompokkan dua subset titik-titik yang saling lepas dari sebuah graf yang dapat menunjukkan hubungan antara keduanya. Maksimal biclique subgraf atau yang sering disebut dengan bipartisi komplit subgraf (Cornaz and Fonlupt, 2006) banyak dimodelkan dan digunakan seperti pada bidang komunikasi dan biologi. Contohnya, misalkan terdapat n pelanggan dalam suatu jaringan komunikasi. Beberapa orang memiliki banyak kontak, sedangkan yang lain hanya beberapa. Kelompok pelanggan yang manakah (dengan banyak anggota yang maksimal) yang memiliki interaksi dengan semua anggota kelompok yang lain?

Situasi ini dapat dimodelkan dengan graf dengan pelanggan sebagai titik dan komunikasi sebagai sisi.

Penelitian tentang biclique dari suatu graf sangat menarik untuk diteliti, ini terlihat dari banyaknya penelitian mengangkat biclique dari suatu graf menjadi topik permasalahannya, seperti yang dilakukan oleh Vania et. al(2007), Alexa et. al(2004), Hochbaum (1998), Cornaz (2007), Liu et. al (2006) yang membahas tentang biclique dan biclique maksimal pada suatu graf yang banyak diselesaikan dengan algoritma untuk menghitung banyaknya biclique maksimal tanpa adanya perhitungan ganda.

Sebuah graf bipartisi adalah graf dimana himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan X dan Y sedemikian sehingga setiap sisi mempunyai satu titik ujung di X dan titik ujung lain di Y. Partisi (X, Y) disebut sebuah bipartisi dari sebuah graf. Sebuah graf bipartisi komplit adalah sebuah graf bipartisi sederhana dengan bipartisi (X,Y) dimana setiap titik di himpunan X terhubung ke setiap titik di Y. Jika |X| = m dan |Y | = n maka dinotasikan dengan K (Bondy and Murty, 1982) Sebuah biclique dalam sebuah graf G adalah sebuah subgraf bipartisi komplit dari graf G tersebut (Haemers, 2001). Sebuah biclique H merupakan maksimal biclique di graf G jika dan hanya jika tidak terdapat biclique lain dalam G yang memuat H. Syarat interaksi semua-lawan-semua terhadap sebuah maksimal biclique merupakan keharusan karena jika sebuah sisi saja hilang dari subgraf tersebut dapat mengakibatkan subgraf tersebut bukanlah lagi sebuah maksimal biclique (Li et. al, 2008) . Tentang apakah maksimal biclique dari sebuah graf hanya terdapat satu di setiap graf ataukah sebuah graf bisa memiliki lebih dari satu biclique maksimal merupakan hal yang menarik untuk dilihat.

Sebuah graf dapat dipresentasikan melalui sebuah matrik keterhubungan titik atau disebut matriks adjacency. Sebuah graf akan menghasilkan sebuah matriks simetris dengan masukan diagonalnya 0 dan tanpa masukan negatif jika graf tersebut merupakan graf tanpa loop dan tak berarah. Untuk itu ditetapkan graf yang diteliti adalah graf tanpa loop dan tanpa arah. Dengan demikian matriks yang akan dihasilkan akan memiliki pola-pola yang didapat dari hasil pengubahan masukan matriks menjadi data transaksi yang mengandung pola yang
nantinya akan dipakai sebagai cara menentukan jumlah biclique maksimal dalam graf tersebut. Xiang et. al (2012) dalam penelitiannya menggunakan matriks adjacency (0,1) sebagai database transaksional dan aplikasi penggunaan transformasi database dalam bidang biologi dengan merepresentasikan 1 sebagai relasi gene-phenotype dan 0 sebagai lambang ketiadaan relasi. Hal ini menunjukkan bahwa transformasi transaksi database dapat digunakan diberbagai bidang.

Pada graf Kneser yang merupakan graf khusus yang pertama kali ditemukan oleh Martin Kneser ini juga dilakukan pencarian subgraf biclique maksimalnya. Disini terlihat berapa jumlah subgraf biclique maksimalnya dan dengan pola tertutup dapat dicari subgraf biclique maksimalnya.

Biclique

Graf G adalah pasangan (V(G),E(G)) dengan V(G) adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut dengan titik, dan E(G) adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurut dari titik-titik berbeda di V(G) yang disebut dengan sisi. Graf bipartisi adalah sebuah graf yang mempunyai sifat khusus yang berkaitan dengan titik, sisi dan derajatnya. Sebuah graf G = (V, E) dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2 dan dinotasikan dengan $G = (V_1,\ V_2, E)$.

Sebuah graf G disebut bipartisi komplit jika graf G dapat dibipartisi menjadi $G = (V_1,\ V_2, E)$ dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi atau himpunan titik V_1 dan n titik pada partisi atau himpunan titik yang lain V_2 dilambangkan dengan $K_{m,n}$. Diberikan sebuah graf G=(V,E), graf $H = (V', E')$ adalah sebuah subgraf dari G jika $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ dan $\forall\{u,v\} \in E', u, v\ \in V'$. Sebuah graf G=(V,E) adalah sebuah bipartisi jika himpunan titik-titik V bisa dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong yang saling terpisah V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi di E menghubungkan sebuah titik di V_1 dan sebuah titik di V_2. Karena itu, tidak ada sisi di E yang menghubungkan baik dua titik di V_1 ataupun dua titik di V_2. Bipartisi juga dinotasikan dengan $G=(V_1,V_2,\ E)$. Diberikan sebuah graf bipartisi $G=(V_1 \cup V_2,\ E)$, sebuah biclique $H=U_1 \cup U_2$ adalah sub himpunan dari himpunan titik-titik sedemikian sehingga untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_2$, terdapat sebuah sisi antara u dan v yaitu $E = \{\{u,v\} | u \in V_1,\ v \in V_2\}$ (Dawande et. al, 2001). Ditambahkan Liu et. al (2006) bahwa jika diberikan H adalah sebuah subgraf biclique dari graf G. Jika tidak terdapat biclique subgraf H_2 lain dari G sedemikian sehingga H adalah proper subgraf dari H_2, maka H adalah biclique maksimal dari G. Penentuan ini bukan hanya dilakukan untuk sebuah graf yang dapat dipartisi saja. Namun semua graf G termasuk graf yang tidak dapat dibipartisi karena graf tersebut memiliki cycle ganjil.

Teorema 1 (AsratianA.S (1998)) Sebuah graf G adalah graf bipartisi jika dan hanya jika G tidak mempunyai cycle ganjil.

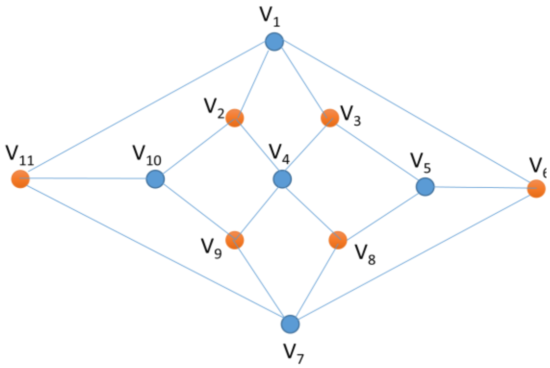
Bukti : Andaikan G adalah sebuah graf bipartisi dengan partisi (V_1,V_2) dan $C = v_0v_1v_2 \ldots v_kv_0$ adalah sebuah cycle di G. Tanpa menghilangkan keumumannya, kita asumsikan $v_0 \in V_1$. Maka, karena Ggraf bipartisi, v_1 haruslah sebuah titik di subset V_2. Tentu kita harus punya $v_{2i} \in V_1$ dan $v_{2i+1} \in V_2$. Karena itu k haruslah ganjil, dan C adalah sebuah cycle genap. Jelas bahwa ini cukup untuk membuktikan dengan konvers jika G terhubung. Kita tetapkan sebuah partisi dari V(G) dengan aturan :

$V_1 = \{u \in V(G) : d_G(u,v)$ adalah genap$\}$,

$V_2 = \{u \in V(G) : d_G(u,v)$ adalah ganjil$\}$.

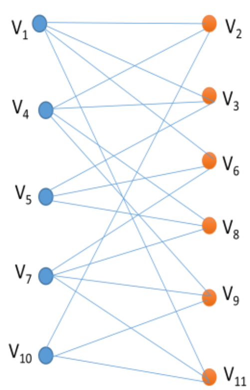
Tinggal menunjukkan bahwa (V_1,V_2) memang sebuah partisi di G. Andaikan x dan y adalah dua titik di V_1, sehingga $xy \in E(G)$. Andaikan P menjadi lintasan terpendek (x,v), Q menjadi lintasan terpendek (y,v) dan v_1 menjadi titik temu pertama dari P dan Q. Jelas bahwa sejak P dan Q adalah lintasan-lintasan terpendek, maka bagian (v_1,v) jugamerupakan lintasan terpendek (v_1,v). Faktanya mereka memiliki panjang yang sama. Andai P_1 dan Q_1 berturut-turut adalah bagian (x,v_1) dan (y,v_1) dari P danQ. Maka karena P danQ memiliki panjang yang sama menyebabkan P_1 dan Q_1 juga memiliki kesamaan yang sama. Maka tidak ada dua titik di V_1 yang bertetangga. Begitu juga di V_2, tidak terdapat dua titik yang saling bertetangga. Maka (V_1,V_2) memang merupakan sebuah partisi di G.

Contoh :



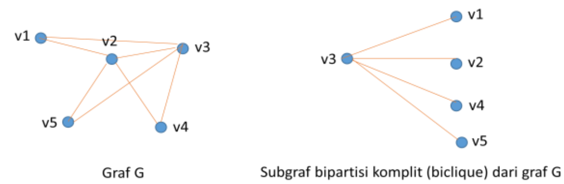
Gambar 1. Graf G yang bisa dibipartisi

Graf G diatas tidak memiliki cycle ganjil sehingga bisa dibipartisi menjadi graf bipartisi tanpa menghilangkan satupun titik ataupun sisi yang dimilikinya sebelum dibipartisi. Sebuah graf terhubung memiliki bipartisi yang unik. Berikut adalah gambar graf bipartisi dari graf G pada gambar 1 diatas.



Gambar 2. Graf bipartisi dari graf G

Terlihat bahwa graf tersebut bukanlah graf bipartisi komplit sehingga graf tersebut tidak dapat dijadikan biclique subgraf dari graf itu sendiri. Jika suatu graf tidak dapat dibipartisi dengan tetap mempertahankan semua titik dan sisinya maka graf tersebut bukanlah graf bipartisi tapi hanya akan memiliki subgraf bipartisi saja.



Gambar 3. Biclique Subgraf dari G

Graf G pada gambar 3 diatas memiliki cycle dengan panjang ganjil maka graf tersebut tidak dapat dipartisi tanpa menghilangkan satupun titik ataupun sisi didalamnya. Dengan kata lain graf tersebut bukanlah graf bipartisi. Untuk graf yang ada disampingnya tersebut merupakan sebuah subgraf bipartisi komplit (biclique) dengan $V_1 = \{v_3\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Sebuah subgraf biclique dapat disebut subgraf biclique maksimal jika kita tidak mungkin menambahkan sisi lagi ke himpunan sisi $\langle V_1 \cup V_2, E \rangle$, yang berarti subgraf tersebut mengandung tepat semua sisi yang berawal di V_1 dan berakhir di V_2.

Definisi 1 Sebuah bipartisi $G=(V_1,V_2,E)$ disebut biclique jika untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_2$, terdapat sebuah sisi antara u dan v, yaitu $E=\{\{u,v\} | u \in V_1, v \in V_2\}$

Graf yang memiliki cycle ganjil tidak bisa dibipartisi. Namun semua graf bisa memiliki subgraf bipartisi. Dimana sebuah graf mampu memiliki banyak subgraf bipartisi komplit atau dikenal dengan subgraf biclique. Dengan begitu akan terdapat banyak biclique subgraf yang dimiliki sebuah graf. Permasalahannya kemudian adalah bagaimana menentukan yang mana yang merupakan subgraf biclique maksimalnya.

Subgraf Biclique

Sebuah graf G=(V,E) terdiri dari himpunan titik V dan himpunan sisi E dengan $E \subseteq V \times V$. Diasumsikan G merupakan sebuah graf tak berarah dan tanpa lup, yaitu tidak terdapat (u,u) ∈ E dan setiap (u,v) ∈ E adalah pasangan sisi tak berurut. Sebuah graf $H = \langle V', E' \rangle$ yang dilambangkan dengan kurung siku adalah sebuah subgraf dari graf G jika dan hanya jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$.

Himpunan sisi E dari biclique $G=(V_1,V_2,E)$ dapat ditentukan dengan dua himpunan titik V_1 dan V_2, maka kita dapat mengabaikan himpunan sisi dan menunjukkan sebuah biclique G sebagai $G=(V_1,V_2)$. Diberikan G=(V,E) adalah sebuah graf tak berarah, V_1 dan V_2 adalah dua subset dari V. Jika V_1,V_2 dan semua sisi-sisi antara V_1 danV_2 membentuk sebuah biclique subgraf dari G, maka V_1 dan V_2 dikatakan membentuk sebuah biclique subgraf dari G. Berdasarkan definisi tersebut, untuk setiap subset V_1 dari V, V_1 dan $\beta(V_1,G)$ membentuk sebuah biclique subgraf dari G.

Definisi 2 Sebuah graf $H = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ adalah maksimal biclique subgraf jika H adalah biclique subgraf dari G sedemikian sehingga $\beta^G(V_1) = V_2$ dan $\beta^G(V_2) = V_1$.

Sebuah subgraf bipartisi komplit $H = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ dari graf G sedemikian sehingga $\beta^G(V_1) = V_2$ dan $\beta^G(V_2) = V_1$ adalah maksimal dengan artian bahwa tidak terdapat subgraf bipartisi komplit lain $H' = \langle V_1' \cup V_2', E' \rangle$ dari G dengan $V_1 \subset V_1'$ dan V_2' sedemikian sehingga $\beta^G(V_1') = V_2'$ dan $\beta^G(V_2') = V_1'$

Pola tertutup dari matriks adjacency

Sebuah matriks adjacency dari sebuah graf dapat ditransformasikan menjadi transaction database (DB) (R. Agrawal et.al(1993)).Untuk menentukan DB, kita mendefinisikan transaksi lebih dulu. Misalkan I adalah himpunan item. Lalu transaksi itu didefinisikan sebagai subset dari I. Sebuah DB adalah sebuah multi himpunan yang tak kosong dari transaksi-transaksi. Setiap transaksi T dalam DB dilambangkan sebagai id(T). Sebuah pola ditetapkan sebagai himpunan tak kosong dari I. Sebuah pola bisa dimiliki atau tidak dimiliki oleh sebuah transaksi.

Definisi 3 Sebuah transaksi database (DB) adalah multi himpunan tak kosong dari transaksi-transaksi. $DB = \{\cup\ T \mid T \subseteq I, T\ = \emptyset\}$.

Diberikan sebuah DB dan pola P, maka jumlah transaksi di DB yang mengandung P disebut support atau pendukung dari P dan dinotasikan dengan $Sup^{DB}(P)$. Diberikan sebuah graf G dengan $V^G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Jika setiap titik v_i di V^G ditetapkan sebagai sebuah item, maka lingkungan $\beta^G(V_1)$ adalah sebuah transaksi.

Jadi, $\{\beta^G(v_1), \beta^G(v_2), \ . \ . \ . \ , \beta^G(v_2)\}$ adalah sebuah DB. Identitas dari suatu transaksi di DB^G ,dimana DB^G adalah database dari graf G, ditetapkan sebagai titik itu sendiri, yaitu $id(\beta^G(V_1))\ =\ v_i$.

DB^G dapat direpresentasikan sebagai matriks biner yang didefenisikan dengan

$$B[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_j \in \beta^G(v_i) \\ 0 & \text{, lainnya} \end{cases}$$

Karena $v_j \in \beta^G(v_i)$ jika dan hanya jika $(v_i, v_j)\ \in E^G$, dapat kita lihat A = B.

Maka ”sebuah pola dalam DB^G” equivalent dengan ” sebuah pola dari matriks adjacency dari G”.

$CL^D(P) = g(f^D(P))$ dikatakan penutup dari P dengan $f^D(P)$ adalah semua transaksi di D yang memuat pola P. Diberikan I adalah himpunan item, dan D adalah sebuah transaksi database yang ditetapkan di I. Untuk sebuah pola P ⊆ I, berikan $f^D(P) = \{T \in D \mid P\ \ \subseteq T\}$, yaitu $f^D(P)$ adalah semua transaksi di D yang mengandung pola P.

Definisi 4 Sebuah pola P adalah sebuah pola tertutup di DB jika dan hanya jika $CL^{DB}(P) = g(f^{DB}(P))$=P dengan $f^{DB}(P)$ adalah semua transaksi di DB yang memuat pola P.

Definisi 5 Himpunan kejadian (occurence) dari pola P pada DB sebagai $occ^{DB}(P) = \{id(T)|T \in DB, P \subseteq T\} = \{id(T)|T \in f^{DB}(P)\}$.

Proposisi 3.1 (Li et. al (2004)) Jika G sebuah graf dan P pola dari DB_G, maka $occ^{DB_G}(P) = \beta^G(P)$

Bukti : Jika $v \in occ(P)$, maka v bertetangga dengan setiap titik di P. Oleh karena itu, $v \in \beta(v')$ untuk setiap $v' \in P$ dimana $v \in \bigcap_{v' \in P} \beta(v') = \beta(P)$. Jika $u \in \beta(P)$, maka u bertetangga ke setiap titik di P. Sehingga, $\beta(u) \supseteq P$. Karena itu, $\beta(u)$ adalah transaksi di DB_G yang memuat P. sehingga $u \in 0cc(P)$

Proposisi 3.2 (Li et. al (2004)) Jika sebuah graf G dan sebuah pola P di DB_G dengan $\beta^G(\beta^G(P)) = CL^{DB_G}(P)$ maka $\beta^G \circ \beta^G$ adalah sebuah operasi tertutup pada pola di DB_G

Bukti : Dari proposisi 3.1, $\beta(\beta(P)) = \beta(occ(P)) = \bigcap_{id(T) \in occ(P)} T = \bigcap_{T \in f(P)} T = g(f(P)) = CL(P)$

Proposisi 3.3 (Li et. al (2004)) Misalkan G sebuah graf dengan C_1 dan C_2 adalah dua pola tertutup di DB_G, $C_1 = C_2$ jika dan hanya jika $Occ^{DB_G}(C_1) = Occ^{DB_G}(C_2)$

Bukti :

($\Rightarrow$) : Jika $C_1 = C_2$ maka $Occ^{DB_G}(C_1) = Occ^{DB_G}(C_2)$. Ini jelas karena dari proposisi 3.1 menyatakan bahwa occurance (occ) dari sebuah pola adalah lingkungan dari pola itu sendiri maka jika $C_1 = C_2$ pastilah $Occ^{DB_G}(C_1) = Occ^{DB_G}(C_2)$.

$\Leftarrow$) : Andaikan $Occ^{DB^G}(C_1) = Occ^{DB^G}(C_2)$ dan $id(T) \in occ(P)$ jika dan hanya jika $T \in f(P)$. Maka kita ambil $f(C_1) = f(C_2)$ dari $Occ(C_1) = Occ(C_2)$. Karena C_1 dan C_2 adalah pola tertutup di DB_G, maka $C_1 = g(f(C_1)) = g(f(C_2)) = C_2$. Terbukti.

Lemma 3.2 (Li et. al (2004)) Jika G sebuah graf, dan C adalah sebuah pola tertutup dari DB_G maka $f^{DB_G}(occ^{DB_G}(C)) = \{\beta^G(c)|c \in C\}$

Bukti : Karena C adalah sebuah pola tertutup, maka $\{c|c \in C\}$ adalah semua dan hanya item-item yang termasuk disetiap transaksi di DB_G yang mengandung C. Ini equivalen dengan {c|c ∈C} adalah semua dan hanya titik-titik di G yang beradjacent ke setiap titik di $occ(C)$. Ini mengakibatkan bahwa $\{\beta^G(c)|c \in C\}$ adalah semua dan hanya transaksi-transaksi yang mengandung occ(C). Dengan kata lain $f^{DB_G}(occ^{DB_G}(C)) = \{\beta^G(c)|c \in C\}$.

Proposisi 3.4 (Li et. al (2004)) Jika G adalah graf dan C adalah sebuah pola tertutup di DB_G maka $occ^{DB_G}(C)$ juga merupakan pola tertutup di DB_G

Bukti : Dari lemma diatas yaitu $f^{DB_G}(occ^{DB_G}(C)) = \{\beta^G(c)|c \in C\}$. $CL(occ(C)) = g(f(occ(C))) = \bigcap f(occ(C)) = \bigcap_{c \in C} \beta(c) = \beta(C)$. Dengan proposisi 3.1, $\beta(C) = occ(C)$. Jadi $occ(C)$ adalah sebuah pola tertutup.

Proposisi 3.5 (Li et. al (2004)) Jika G adalah graf dan C adalah pola tertutup di DB_G. Maka C dan himpunan kejadiannya memiliki perpotongan kosong, yaitu $occ^{DB_G}(C) \cup C = \emptyset$

Bukti : Jika $v \in occ(C)$ maka v bertetangga ke semua titik di C. Karena kita asumsikan G adalah sebuah graf tanpa lup, $v \notin C$ maka $occ^{DB_G}(C) \cup C = \emptyset$

Proposisi 3.5 ini menyatakan bahwa tidak ada pola tertutup yang dipasangkan dengan dirinya sendiri.

Graf Kneser

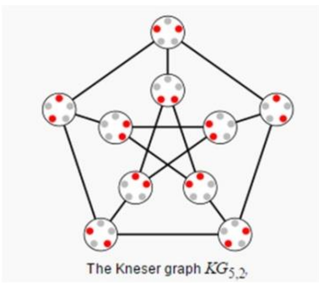
Graf Kneser pertama kali diperkenalkan oleh Martin Kneser pada tahun 1955. Graf Kneser adalah graf yang titik-titiknya merupakan k-elemen subset dari sebuah himpunan n elemen dan dua titik pada graf tersebut disebut berhubungan jika dan hanya jika kedua himpunan yang saling berhubungan saling lepas. Sebuah graf kneser merupakan graf reguler dengan vertex transitive dan edge transitive. Sebuah graf dengan vertex transitive adalah sebuah graf G jika diberikan dua titik V di G maka terdapat automorphism f : V (G) → V (G) sehingga $f(v_1) = v_2$. Godsil et. al (2001) mengatakan bahwa sebuah graf adalah verteks transitive jika grup automorfisme nya berlaku transitive pada setiap titiknya.
Sedangkan graf dengan edge transitive adalah sebuah graf G jika diberikan dua sisi e_1 dan e_2 di G maka automorphism di G memetakan e_1 ke e_2 (Biggs, Norman, 1993). Graf dengan sisi transitive termasuk graf biclique $K_{m,n}$. Sebuah graf Kneser $KG_{m,n}$ memiliki banyak titik $\binom{n}{k}$. Setiap titiknya memiliki tepat tetangga $\binom{n-k}{k}$. Sebuah graf komplit dengan n titik adalah graf Kneser $KG_{m,n}$. Jika n < 3k, graf Kneser tidak memiliki cycle graf C_3, walaupun graf kneser selalu mengandung cycle dengan panjang 4 jika $n \leq 2k + 2$, untuk n mendekati 2k cycle genap terpendeknya tidak memiliki panjang yang konstan (Denley, 1997)

Teorema 3.6 (Teorema Erdos-Ko-Rado)

Jika $n \leq 2r$ dan A adalah keluarga subset dari {1, 2, . . . , n} sehingga setiap subset berukuran r dan setiap pasangan dari subset yang berpotongan, maka banyak himpunan maksimum yang mungkin di A diberikan dengan koefisien binomial $\binom{n-1}{r-1}$
Bukti [Katona]:
Misalkan terdapat keluarga dari subset A. Susun elemen-elemen nya atau titik-titiknya atas 1, 2, . . . , n pada sebuah cyclic order dimana cyclic order adalah sebuah cara untuk menyusun sebuah himpunan titik ke dalam sebuah lingkaran.
Anggap himpunan himpunan dari A yang membentuk interval-interval dengan panjang r didalam cyclic order tersebut. Akan tetapi, tidak mustahil untuk semua interval dari cyclic order tersebut milik A. Untuk melihat ini, andaikan $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ adalah satu dari banyak interval di A, maka setiap interval yang lain dari cyclic order yang sama di A memisahkan a_i dan a_{1+1} untuk beberapa i. Kedua interval yang memisahkah elemen-elemen tersebut saling lepas, sehingga paling banyak terdapat di A. Maka jumlah interval di A lebih banyak 1 dari pasangan titik yang terpisah, paling banyak (r - 1). Berdasarkan ini, dapat dihitung banyak pasangan (S, C), dimana S adalah sebuah himpunan di A dan C merupakan cyclic order dengan S sebagai interval dengan dua cara. Pertama, untuk setiap himpunan S salah satunya akan menghasilkan C dengan memilih satu dari permutasi r! atas S dan selebihnya dengan permutasi (n -r)! , menunjukkan bahwa banyak pasangannya adalah |A|r!(n -r)!. Kedua, terdapat (n -1)! Cyclic order, yang memiliki paling banyak r interval di A, sehingga jumlah pasangannya paling banyak r(n - 1)!.

Dengan menggabungkan kedua perhitungan ini menghasilkan pertidaksamaan |A|r!(n-r)! = r(n-1)! dan membagi kedua sisi dengan r!(n - r)! sehingga menghasilkan $|A| \leq \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}$

Sebuah graf Kneser $KG_{m,n}$ dengan 10 verteks berderajat 3



Hasil dan Pembahasan

Dari sebuah graf bisa dibentuk banyak subgraf, tergantung pada banyak titik dan sisi yang terkandung didalamnya. Semakin banyak titik dan sisi maka akan semakin banyak pula subgraf yang bisa kita bentuk dari sebuah graf. Subgraf biclique maksimal dari sebuah graf merupakan subgraf dengan ketentuan seperti yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya. Akankah terdapat perbedaan mendapatkan sebuah biclique maksimal dari sebuah graf yang dapat dibipartisi dengan sebuah graf yang bukanmerupakan graf bisa dibipartisi?

Mendapatkan sebuah subgraf bipartisi komplit (biclique) dari sebuah graf yang sudah dibipartisi sangat mudah untuk dilakukan karena graf awalnya sudah dapat dibipartisi. Jika sebuah graf bisa dibipartisi maka untuk maksimal subgraf bipartisinya sama dengan graf itu sendiri. Namun apakah subgraf tersebut merupakan biclique haruslah memenuhi syarat bahwa setiap anggota di subset yang satu terhubung ke setiap anggota yang ada di subset yang lainnya. Jika demikian maka dapat dikatakan bahwa subgraf tersebut merupakan subgraf biclique dari graf awal.

Teorema 4.1 (Li et. al (2004)) Misalkan G graf tanpa arah dan tanpa lup. Jika C sebagai pola tertutup di DB_G maka

$H = \langle C \cup occ^{DB_G}(C), C \times occ^{DB_G}(C) \rangle$ adalah subgraf biclique maksimal di G.

Bukti : Asumsikan, C adalah tak kosong dan C memiliki tak nol support di DB_G. Karena itu occ(C) tak kosong dan dari proposisi 3.5 yaitu $C \cap occ^{DB_G}(C) = \emptyset$. Selanjutnya, untuk setiap $v \in occ(C)$, v bertetangga dengan semua titik C di G. Jadi $C \times occ(C) \subseteq E^G$, dan setiap sisi di H terhubung dengan sebuah titik di C dan sebuah titik di occ(C). Maka H adalah subgraf biclique di G. Dengan proposisi 3.1 yakni $occ^{DB_G}(P) = \beta^G(P)$, dengan proposisi 3.2, $C = \beta^G(\beta^G(C))$. Dengan proposisi 3.1, kita peroleh $C = \beta^G\left(occ^{DB_G}(C)\right)$. Sehingga H adalah maksimal. Terbukti.

Teorema 4.2 (Li et. al (2004)) Misalkan G sebagai sebuah graf tanpa arah dan tanpa lup. Graf $H = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ adalah sebuah maksimal biclique atas G. Maka V_1 dan V_2 adalah dua pola tertutup di DB_G, occ^{DB_G} (V_1) = V_2 dan occ^{DB_G} (V_2) = V_1

Bukti : Karena H adalah subgraf biclique maksimal di G, lalu β(V_1) = V_2 dan $\beta(V_2) = V_1$. Dengan proposisi 3.2, $CL(V_1) = \beta(\beta(V_1)) = \beta(V_2) = V_1$. Lalu, $V_1$1 adalah pola tertutup. Hal yang sama dapat dilakukan untuk mendapatkan V_2 sebagai pola tertutup. Dengan proposisi 3.1 , occ(V_1) = β(V_1) = V_2 dan $occ(V_2) = \beta(V_2) = V_1$ Terbukti.

Proposisi 3.4 dan proposisi 3.5 menimbulkan akibat yang menyatakan bahwa banyak pola tertutup pada DB_G adalah genap.

Corollary 4.1 Jika G sebuah graf maka banyak pola tertutup pada DB_G adalah genap.

Bukti :Anggap terdapat n pola tertutup yang muncul paling sedikit 1 kali pada DB_G, notasikan sebagai $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dari proposisi 3.4 menyatakan bahwa setiap himpunan kejadian Occ(C_1), Occ(C_2), . . . , Occ(C_n) juga merupakan pola tertutup di DB_G dan dari proposisi 3.5 menyatakan bahwa tidak ada pola tertutup yang dipasangkan dengan dirinya sendiri maka berapapun banyaknya n pola tertutup pada DB_G selalu terdapat 2×n pola tertutup yang selalu saling berpasangan dengan himpunan kejadiannya. Sehingga banyak pola tertutup pastilah genap.

Perlu diperhatikan bahwa suatu biclique dikatakan maksimal jika tidak dapat menambahkan lagi sisi pada subgraf tersebut. Dalam artian bahwa titik dalam subgraf tersebut harus memiliki derajat titik paling tinggi atau merupakan derajat titik pada graf awal sehingga tidak dapat menambahkan sisi lagi pada titik tersebut. Untuk G = (V_1 ∪ V_2, E) jika $v_i \in V_1$ memiliki derajat titik m maka biclique maksimalnya akan memiliki m titik yang menjadi element di V_2. V_1 akan memiliki banyak titik lebih dari satu jika $v_i \in V_1$ memiliki tetangga yang sama sedemikian sehingga tidak merubah jumlah titik pada V_2.

Berikut adalah cara menentukan subgraf biclique maksimal menggunakan pasangan pola tertutup :

• Ubah graf tanpa arah dan tanpa lup ke bentukmatriks adjacency dari graf tersebut sehingga diperoleh matriks-(0,1);

• Transformasikan matriks ke database dengan cara menggantikan kolom v_j menjadi item dalam transaksi dan baris v_i menjadi lingkungan dari transaksi item tersebut. Sehingga baris menjadi himpunan transaksi dan kolom menjadi himpunan item;

• Tentukantransaksi database dari database tersebutdengancaramengumpulkan

ataumenghimpun transaksi-transaksi yang dipunya oleh setiap item;

• Iriskan transaksi-transaksi tersebut sehingga mendapatkan pola tertutup;

• Setelah itu dicari pasangandari setiap pola tertutup tersebut dengan mengambil himpunan kejadian(occ) dari setiap pola tertutupnya dengan cara mengambil lingkungan (β) dari pola tertutup tersebut berdasarkan tabel transformasi transaksi atau dari matriks adjacencynya;

• Pasangan pola tersebut akan menjadi dua himpunan yang membentuk subgraf biclique;

• Pasangan-pasangan yang terbentuk merupakan subgraf biclique maksimal dari graf tersebut. Selesai.

Dari penelitian ini dihasilkan pernyataan bahwa banyak dari pola tertutup adalah tepat dua kali banyak maksimal biclique subgraf dari G. Untuk semua subgraf biclique maksimal selalu terdapat sebuah pasangan unik dari pola tertutup yang menyatukan dua buah himpunan vertex dari sebuah subgraf. Hasil yang didapat bila dilakukan dengan cara penggunaan algoritma dengan membipartisi terlebih dahulu sampai pada menghasilkan subgraf bipartisi komplit maksimal akan sama bila dilakukan dengan cara mentransformasi matriks adjacency ke database, mendapatkan pasangan pola tertutupnya sampai pada menghasilkan subgraf bipartisi komplit yang maksimal atau disebut dengan subgraf biclique maksimal.

Pencarian subgraf biclique maksimal dapat dilakukan pada setiap graf. Apakah memiliki subgraf biclique maksimum atau tidak. Graf kneser memenuhi klaim pada penelitian ini yakni merupakan graf tanpa arah dan tanpa lup juga tanpa sisi paralel. Pada bab 3 telah dijelaskan bahwa setiap graf Kneser merupakan graf yang memiliki cycle ganjil sehingga merupakan graf yang tidak dapat dibipartisi. Jadi, bagaimanakah subgraf biclique pada graf Kneser? Pada sebuah subgraf biclique diperlukan dua buah himpunan titik X dan Y sehingga semua titik di X terhubung ke setiap titik di Y dimana titik pada masing-masing himpunan tidak bertetangga. Andaikan n adalah bilangan genap, bagi himpunan menjadi dua sub himpunan A dan B dari n/2 elemen. Pilih sebagai X semua titik yang sesuai dengan himpunan dengan k-elemen dari A yang mengandung elemen atau titik tetap a ∈ A, berlaku sama dengan B. Hal ini akan menghasilkan 2 ×2 × $\binom{\frac{n}{2-1}}{k-1}$ titik di A∪B.

Andaikan X dan Y adalah dua subhimpunan yang merupakan pembentuk graf biclique. Maka : X adalah intersecting family $\forall x_i \in X, x_j \in X$ memenuhi $x_i \cap x_j \neq \emptyset$ sedemikian sehingga titik-titik di X tidak bertetangga. Demikian juga berlaku di Y . Juga ∀x ∈ X dan y ∈ Y dengan $x \cap y \neq \emptyset$ terdapat sisi dari x ke y.

Misalkan $A = \cup_{x \in X}\, x$ dan $B = \cup_{y \in Y}\, y$ Dengan A dan B disjoint (jika tidak maka terdapat x ∈ X dan y ∈ Y dengan $x \cap y \neq \emptyset$. Hal ini membenarkan pemisahan titii-titik mejadi dua himpunan yang saling disjoint. Berikan a = |A| dan b = |B| dengan catatan a + b = n. Ingat bahwa himpunan X adalah sebuah perpotongan keluarga dari himpunank, yang berasal dari himpunan awal dengan a titik. Teorema Erdos-KoRado mengatakan bahwa banyak himpunan k yang terdapat di X adalah : $\binom{a-1}{k-1}$

Hal ini mengakibatkan bahwa :

$|X| \leq \binom{a-1}{k-1}$ dan $|Y| \leq \binom{b-1}{k-1}$

Jadi, subgraf biclique maksimum yang mungkin didapat adalah :

$$Maks \binom{a-1}{k-1} + \binom{n-a-1}{k-1}.$$

Diasumsikan bahwa a dan b paling sedikit sebanyak k (diasumsikan bahwa diharapkan akan terdapat subgraf biclique yang memiliki sisi) maka optimisasikan partisinya. Banyak titik yang mungkin dimiliki dalam sebuah subgraf biclique dari graf Kneser adalah :

$$\binom{n-k-1}{k-1} + 1.$$

Lakukan pencarian pola tertutup dari matriks adjacency dari graf Kneser dan akan mendapatkan jumlah titik dalam subgraf biclique maksimal dari graf Kneser tersebut sebanayak titik yang diperoleh dari perhitungan dengan menggunakan rumus di atas.

Terdapat sebuah permasalahan yang didapat pada graf bipartisi. Selanjutnya diharapkan akan ada yang meneliti lebih lanjut tentang jumlah maksimum sisi pada graf bipartisi (n, n) yang tidak memiliki subgraf biclique K. Diharapkan akan ada lagi penelitian yang bisa mengembangkan ilmu graf terutama dalam topik graf khususnya maksimal biclique subgraf, sehingga bisa diperoleh cara menampilkan semua maksimal biclique subgraf dari suatu graf walaupun bukan merupakan graf bipartisi. Dan bisa mengembangkan ke arah multi-partisi subgraf.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Agrawal. R, Imielinski .T, dan Swami .A (1993) Mining Association Rules between Sets of Items in Large Databases *Proceedings of the 1993 ACM-IGMOD international Conference on Management of Data*. 207-216.

[2] Alexe.G, Alexe.S, Crama .Y, Foldes. S, P. L. Hammer, and B. Simeone(2004), Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques. *Discrete Applied Mathematics* 145(1), pp. 11-21.

[3] Asratian A. S, Tristan M. J. Denley and Roland Haggkvist (1998) ”Bipartite Graphs and Their Application”, Cambridge Tracts inMathematics 131.

[4] Bondy J. A. and U. S. R. Murty (1982) Graph Theory with Applications. NorthHolland. Brualdi R.A and Herbert J. Ryser,(1991) ”Combinatorial Matrix Theory”, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

[5] Cornaz D(2007). The maximum induced bipartite subgraph problem with edge weights. *SIAM J. Discrete Math* 21(3), 662–675.

[6] Cornaz D and Jean Fonlupt(2006) Chromatic characterization of biclique cover *Discrete Mathematics* 306(5), 495-507

[7] Dawande.M, Pinar Keskinocak, Jayashankar M. Swaminathan and Sridhar Tayur (2001) On Bipartite and Multipartite Clique Problems. *Journal Of Algorithms* 41,388-403

[8] Enver Kayaaslan (2010) On Enumerating All Maximal Biclique of Bipartite Graphs *CTW* 2010

[9] Eppstein D (1994). Arboricity and bipartite subgraph listing algorithms. *Information Processing Letters* 51:207–211.

[10] Godsil C and Gordon Royle (2000)Algebraic Graph Theory. *Graduate Texts in Mathematics* 207. Springer.

[11] Haemers Willem H(2001) Biclique and Eigen values *Journal of Combinatorial Theory* Series B 82, 56-66

[12] Hochbaum Dorit S (1998). Approximating Clique and Biclique problems. *Journal of algorithms*, 29,174–200.

[13] Li. J, HaiquanLi,Donny Soh, danLimsoonWong (2005)Acorrespondence between maksimal complite bipartite subgraph and closed pattern *Knowledge Discovery in Databases;PKDD 2005 Lecture Notes in Computer Science* 3721, 146-156

[14] Liu G , Kelvin Sim, Jinyan Li (2006) Efficient Mining of Large Maximal Bicliques. *Data Warehousing and knowledge discovery. Lecture Notes in Computer Science*, 4081: 437–448.

[15] Liu Y, Aixin Sun, Han T Loh, Wen F Lu and Ee-Peng Lim (2008). Advances of Computational Intelegence in Industrial Systems. *Studies in Computational Intelligence* Vol 116: 99–116.

[16] Lowell W. Beineke, Robin J. Wilson and Peter J. Cameron(2004) Topics In Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press.

[17] Marcus Daniel A. (2008). ”Graf Theory. A Problem Oriented Approach”, The Mathematical Association of America. (Incorporated)

[18] Vania M.F. Dias, Celine M.H. de Figueiredo and Jayme L. Szwarcfiter. (2007). On the generation of bicliques of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 155(2007) : 1826-1832.

[19] Yan. X and Jiawei Han (2003) Closed Graph: Mining Closed Frequent Graph Pattern. *Conference on Knowledge discovery and data mining* 286-295.

[20] Yang Xiang, Philip R.O. Payne, and Kun Huang (2012) Transactional Database Transformation and Its Application in Prioritizing Human Disease *Genes IEEE/ACM Trans Comput Biol Bioinform* 9(1) :294-304.

[21] Godsil, Chris; Royle, Gordon (2001), Algebraic Graph Theory, Graduate Text in Mathematics 207 New York: Springer-Verlag

[22] Biggs, Norman (1993). Algebraic Graph Theory (2nd ed) Cambridge; Cambridge Univercity Press. P. 118. ISBN 0-521-45897-8

[23] Denley, Tristan (1997), ”The odd girth of the generalised Kneser graph*”, European Journal of Combinatorics* 18 (6) : 607-611.

[24] Katona, G.O.H (1972). ”A simple proof of Erdos-Chao Ko-Rado Theorem”. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B 13(2):183-184.