

## INDEKS PELANGI-3 KUAT GRAF HASIL OPERASI KALI SISIR TITIK GRAF TANGGA DENGAN GRAF BINTANG ( $L_n \triangleright \circ K_{1,r}$ )

Dinda Kartika

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan  
Jalan Willem Iskandar Pasar V Medan  
[dindakartika@unimed.ac.id](mailto:dindakartika@unimed.ac.id)

### ABSTRAK

Misalkan  $k \in \mathbb{N}$  dan  $G = (V(G), E(G))$  suatu graf terhubung tak trivial yang berhingga. Misalkan pula  $T$  suatu pohon pada  $G$  dan  $S \subseteq V(G)$  subhimpunan- $k$ . Didefinisikan suatu pewarnaan- $h$   $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, h\}$ ,  $h \in \mathbb{N}$  pada sisi-sisi  $G$  dengan dua buah sisi yang bertetangga dapat memiliki warna yang sama. Pohon  $T$  dikatakan pohon pelangi jika tidak ada dua sisi pada pohon yang diwarnai sama. Selanjutnya, pohon- $S$  pelangi adalah pohon pelangi yang menghubungkan titik-titik di  $S$ . Suatu pewarnaan- $h$   $c$  yang setiap subhimpunan- $k$ -nya terdapat pohon- $S$  pelangi disebut pewarnaan- $h$  pelangi- $k$ . Indeks pelangi- $k$  dari  $G$ , dinotasikan dengan  $rx_k(G)$ , adalah bilangan bulat  $h$  terkecil sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi- $k$ . Sementara itu, jarak Steiner dari subhimpunan- $k$   $S \subseteq V(G)$  adalah ukuran minimum pohon di  $G$  yang menghubungkan titik-titik di  $S$ . Pohon  $T$  dikatakan pohon- $S$  Steiner pelangi atau lebih sederhana pohon Steiner pelangi jika tidak ada dua sisi pada pohon yang diwarnai sama dengan ukuran pohon  $T$  tersebut sama dengan jarak Steiner-nya. Suatu pewarnaan- $h$   $c$  yang setiap subhimpunan- $k$ -nya terdapat pohon Steiner pelangi disebut pewarnaan- $h$  pelangi- $k$  kuat. Indeks pelangi- $k$  kuat dari  $G$ , dinotasikan dengan  $srx_k(G)$ , adalah bilangan bulat  $h$  terkecil sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi- $k$  kuat. Pada tulisan ini penulis mengkaji mengenai indeks pelangi-3 kuat dari graf hasil operasi kali sisir titik graf tangga dengan graf bintang.

**Kata kunci:** graf tangga, hasil kali sisir, indeks pelangi-3 kuat

### ABSTRACT

Let  $k \in \mathbb{N}$  and  $G = (V(G), E(G))$  be a finite nontrivial connected graph. Let  $T$  be a tree on  $G$  and  $S \subseteq V(G)$  is a  $k$  subset. Define an edge coloring- $h$   $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, h\}$ ,  $h \in \mathbb{N}$  on  $G$  with adjacency edges can have the same color. A tree  $T$  is said to be a rainbow tree if there are no two edges on  $T$  have the same color. Furthermore, rainbow- $S$  tree is a rainbow tree that connects the vertices of  $S$ . A  $h$ -coloring  $c$  that every  $k$ -subset has rainbow  $S$ -tree is called  $k$ -rainbow  $h$ -coloring. The  $k$ -rainbow index of  $G$ , denoted by  $rx_k(G)$ , is the minimum  $h$  such that  $G$  has a  $k$ -rainbow  $h$ -coloring. Meanwhile, the Steiner distance of  $k$ -subset  $S \subseteq V(G)$  is the minimum size of a tree in  $G$  that connects  $S$ . A tree  $T$  is said rainbow Steiner  $S$ -tree or simply a rainbow Steiner tree if no two edges in  $T$  have the same color. A  $h$ -coloring  $c$  that every  $k$ -subset has rainbow Steiner tree is called strong  $k$ -rainbow  $h$ -coloring. The strong  $k$ -rainbow index of  $G$ , denoted by  $srx_k(G)$ , is the minimum  $h$  such that  $G$  has strong  $k$ -rainbow

*h-coloring. In this paper, the author examined the strong 3-rainbow index of comb product of ladder graphs with star graphs.*

**Keywords:** *comb product, ladder graph, star graph, strong 3-rainbow index.*

## PENDAHULUAN

Pada saat ini, kasus kebocoran informasi rahasia suatu instansi pemerintah marak dibicarakan. Terlebih setelah Edward J. Snowden membocorkan rahasia intelijen Amerika pada Juni 2013. Snowden adalah mantan kontraktor Amerika Serikat dan karyawan Badan Intelijen Amerika Serikat (CIA) serta kontraktor National Security Agency. Snowden membocorkan informasi rahasia program NSA seperti PRISM kepada The Guardian dan The Washington. Dari informasi yang ada, ia hanyalah pegawai biasa kelas bawah. Snowden bekerja di sebuah pangkalan kecil di Hawaii. Namun, Snowden berhasil men-*download* sistem pengamanan intelijen, dokumen-dokumen mengenai operasi pengumpulan bahan inteligen, dan keputusan pengadilan rahasia Amerika tanpa terdeteksi. Hal ini menunjukkan bahwa seketat apapun sebuah rahasia dijaga tetap mempunyai kerentanan dan kerawanan.

Menurut Indrajit [5], salah satu penyebab kasus kebocoran informasi adalah lemahnya manajemen informasi yang diberlakukan atau dipraktikkan oleh suatu lembaga. Setiap karyawan yang bekerja pada suatu badan intelijen haruslah memiliki akses yang berbeda terhadap suatu informasi rahasia. Akan tetapi, karena informasi yang diakses adalah yang berkaitan dengan masalah pemerintahan, maka suatu sistem pengaksesan informasi tersebut haruslah bersifat umum. Oleh karena itu, untuk mengurangi kebocoran sistem informasi maka perlu adanya pembatasan informasi yang dapat diakses oleh setiap karyawan sesuai proporsi

masing-masing, sehingga pertukaran rahasia antar karyawan juga terbatas.

Permasalahan di atas dapat diatasi salah satunya dengan memberikan kata kunci pengaksesan informasi yang berbeda untuk setiap karyawan. Namun, mengingat banyaknya karyawan yang bekerja pada suatu badan intelejen, hal tersebut tidak efektif. Oleh karena itu, diperlukan suatu sistem dengan setiap dua karyawan memiliki kata kunci yang berbeda untuk dapat mengakses informasi dengan jumlah kata kunci keseluruhan sesedikit mungkin. Banyaknya kata kunci minimal inilah yang direpresentasikan sebagai bilangan terhubung pelangi. Konsep bilangan terhubung pelangi diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2008 [1]. Kemudian pada [1] pula, Chartrand dkk. (2008) memperkenalkan bilangan terhubung pelangi kuat. Penelitian lain mengenai bilangan terhubung pelangi kuat dapat dilihat pada [8].

Pada tahun 2010, Chartrand dkk. [2] memperkenalkan konsep indeks pelangi- $k$  yang merupakan perumuman dari konsep bilangan terhubung pelangi. Untuk hasil dari indeks pelangi- $k$  salah satunya berupa indeks pelangi-3 untuk graf bipartit lengkap dan graf roda oleh Chen dkk. (2015) pada [3].

Salah satu permasalahan yang sering diajukan oleh peneliti adalah menentukan indeks pelangi dari beberapa graf hasil operasi, seperti yang dilakukan oleh Kartika, D. dan Salman A.N.M. (2019) pada [7], yang mencari indeks pelangi-3 dari graf hasil operasi join graf dengan graf trivial ( $K_1$ ).

## TINJAUAN PUSTAKA

### Graf

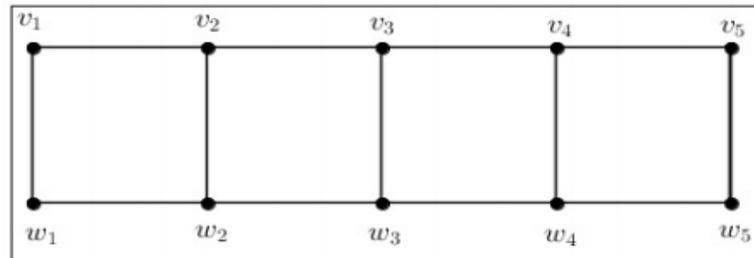
Suatu graf  $G$  [4] didefinisikan sebagai pasangan terurut  $G = (V(G), E(G))$  sehingga  $E(G) \subseteq [V(G)]^2 = \{\{x, y\} | x \in V(G) \wedge y \in V(G)\}$ . Himpunan tak kosong  $V(G)$  dinamakan himpunan titik dan himpunan  $E(G)$  dinamakan himpunan sisi. Untuk mempermudah penulisan, tulis  $\{x, y\}$  sebagai  $xy$ .

### Lintasan

Lintasan berorde  $n$ , dinotasikan dengan  $P_n$ , adalah graf yang himpunan titiknya dapat dilabeli dengan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sedemikian sehingga himpunan sisinya adalah  $\{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$ .

### Graf Tangga

Graf tangga, dinotasikan dengan  $L_n$ , dengan  $n \geq 2$ , adalah graf yang diperoleh dari dua buah duplikat graf lintasan  $P_n$ , misalkan  $P_{n_1}$  dan  $P_{n_2}$ . Titik  $v_i$  pada  $P_{n_1}$  dihubungkan dengan titik  $w_i$  pada  $P_{n_2}$  oleh sebuah sisi, dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ .



Gambar 1. Graf tangga  $L_5$

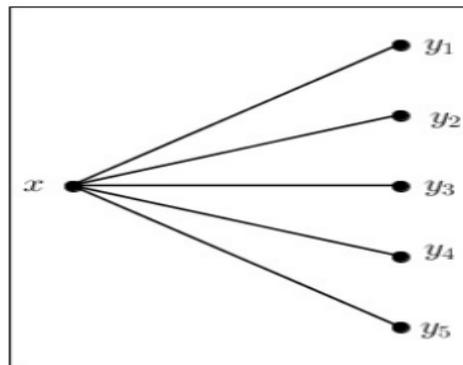
### Graf Bipartit

Suatu graf  $G$  disebut graf bipartit apabila himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua buah subhimpunan tak hampa  $X$  dan  $Y$  sedemikian sehingga untuk setiap sisi di  $G$  berlaku salah satu ujungnya berada di  $X$  dan ujung lainnya berada di  $Y$ . Jika setiap titik di  $X$  bertetangga dengan setiap

titik di  $Y$  maka  $G$  disebut graf bipartit lengkap.

### Graf Bintang

Graf bintang, dinotasikan dengan  $K_{1,n}$  adalah graf bipartit lengkap dengan  $|X| = 1$  dan  $|Y| = n$ .

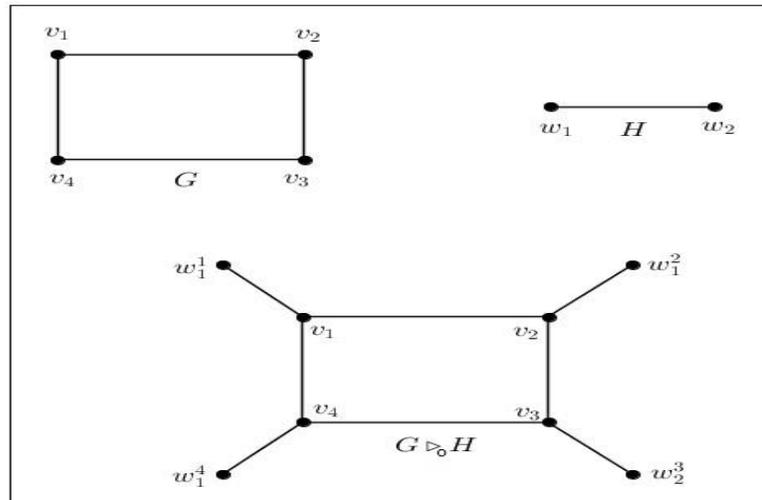


Gambar 2. Graf bintang  $K_{1,5}$

### Operasi Hasil Kali Sisir Titik

Misalkan  $G$  dan  $H$  graf terhubung. Misalkan  $o \in V(H)$ . Hasil kali sisir titik dari dua graf saling lepas  $G$  dan  $H$ , dinotasikan dengan  $G \triangleright_o H$ , adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah

duplikat dari graf  $G$  dan  $|G|$  duplikat dari graf  $H$ , kemudian mengidentifikasi duplikat ke- $i$  dari  $H$  pada titik  $o$  dengan titik ke- $i$  dari  $G$  untuk setiap  $i \in [1, |G|]$ .

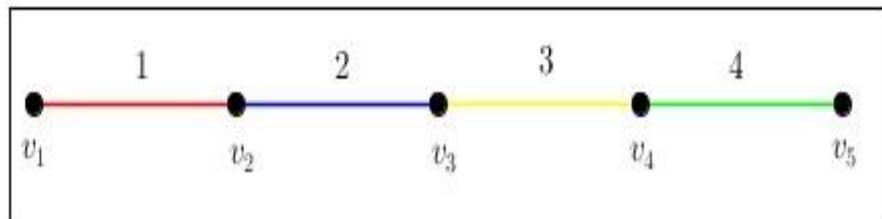


Gambar 3. Contoh operasi hasil kali sisir titik pada graf

### Bilangan Terhubung Pelangi

Misalkan  $G$  graf tak trivial, berhingga, dan terhubung. Definisikan suatu pewarnaan  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, h\}$  untuk sebarang  $h \in \mathbb{N}$ , sedemikian sehingga sisi-

sisi yang bertetangga boleh diwarnai dengan warna yang sama. Suatu lintasan di  $G$  dikatakan lintasan pelangi, jika setiap sisi di lintasan diwarnai dengan warna yang berbeda.



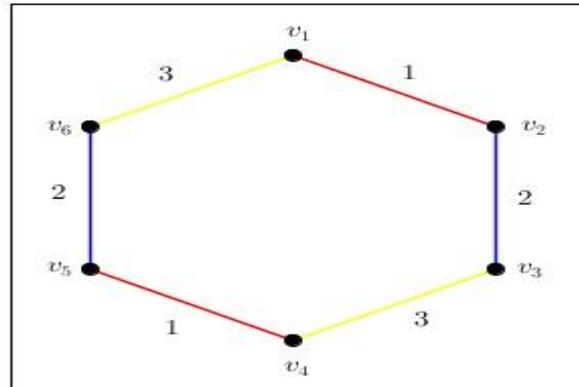
Gambar 4. Lintasan pelangi  $v_1 - v_5$

$G$  dikatakan terhubung pelangi jika untuk setiap dua titik  $x$  dan  $y$  di  $V(G)$  terdapat lintasan pelangi yang menghubungkannya.

Suatu pewarnaan sisi di  $G$  sehingga  $G$  terhubung pelangi dinamakan pewarnaan pelangi. Fungsi  $c$  dikatakan pewarnaan- $h$

pelangi jika menggunakan  $h$  warna. Bilangan terhubung pelangi dari  $G$ , dinotasikan dengan  $rc(G)$ , adalah bilangan

bulat terkecil  $h$  sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi.



Gambar 5. Pewarnaan-3 pelangi pada  $C_6$

Pada Gambar 5. didefinisikan pewarnaan-3 pelangi pada  $C_6$ . Artinya, jika diambil setiap dua titik pada  $C_6$  terdapat lintasan pelangi yang menghubungkannya.

Graf  $G$  dikatakan terhubung pelangi kuat jika untuk setiap dua titik  $x \in V(G)$  dan  $y \in V(G)$  terdapat lintasan pelangi yang menghubungkannya dengan panjang lintasan pelangi tersebut sama dengan jarak dari  $x$  ke  $y$ . Suatu pewarnaan sisi di  $G$  sehingga  $G$  terhubung pelangi kuat dinamakan pewarnaan pelangi kuat. Fungsi  $c$  dikatakan pewarnaan- $h$  pelangi kuat jika pewarnaan pada  $G$  menggunakan  $h$  warna. Bilangan terhubung pelangi kuat dari  $G$ , dinotasikan dengan  $src(G)$ , adalah bilangan bulat terkecil  $h$  sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi kuat. Jadi,  $rc(G) \leq src(G)$  untuk setiap graf  $G$  yang terhubung.

Untuk membuat  $G$  terhubung pelangi dibutuhkan paling sedikit  $diam(G)$  warna, dengan  $diam(G)$  adalah diameter graf  $G$ . Disamping itu, jika semua sisi pada graf  $G$  diwarnai dengan warna yang berbeda maka pewarnaan tersebut mendefinisikan

pewarnaan pelangi. Oleh karena itu diperoleh:

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq \|G\| \quad (1)$$

Berikut beberapa hasil mengenai bilangan terhubung pelangi dari beberapa peneliti terdahulu.

**Teorema 1.** [1]

Jika  $G$  graf terhubung tak trivial dengan ukuran  $m$ , maka

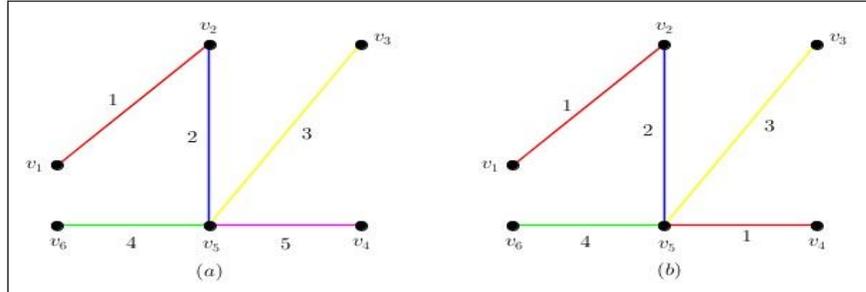
- a)  $src(G) = 1$  jika dan hanya jika  $G$  graf lengkap,
- b)  $rc(G) = 2$  jika dan hanya jika  $src(G) = 2$ ,
- c)  $rc(G) = m$  jika dan hanya jika  $G$  adalah graf pohon.

**Teorema 2.** [1]

Misalkan  $n \in \mathbb{N}$  dengan  $n \geq 4$ , maka  $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

### Indeks Pelangi- $k$

Pada tahun 2010, Chartrand dkk. [2] memperumum konsep lintasan pelangi ke



Gambar 6. (a) Pohon pelangi pada  $T_6$ , (b) Pohon bukan pelangi pada  $T_6$

Untuk  $S \subseteq V(G)$ , pohon- $S$  pelangi adalah pohon pelangi yang menghubungkan titik-titik di  $S$ . Suatu pewarnaan sisi di  $G$  dikatakan pewarnaan- $h$  pelangi- $k$  jika untuk setiap subhimpunan- $k$   $S$  dari  $V(G)$  terdapat pohon- $S$  pelangi.

Indeks pelangi- $k$  dari  $G$ , dinotasikan dengan  $rx_k(G)$ , adalah bilangan bulat terkecil  $h$  sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi- $k$ .

Secara umum, jika semua sisi pada suatu graf diwarnai dengan warna yang berbeda, maka pewarnaan tersebut mendefinisikan pewarnaan- $h$  pelangi- $k$ .

$$k - 1 \leq sdiam_k(G) \leq rx_k(G) \leq \|G\| \quad (2)$$

### Indeks Pelangi- $k$ Kuat

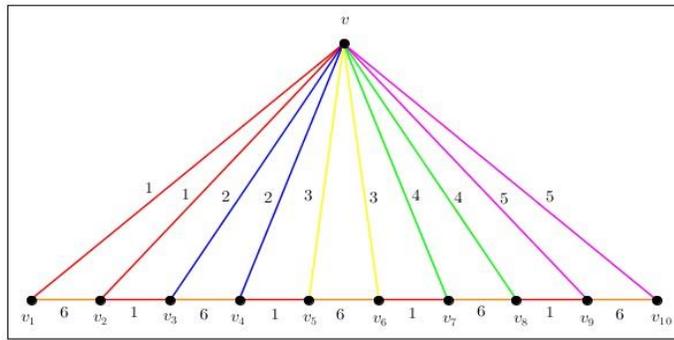
Suatu pewarnaan sisi di  $G$  dikatakan pewarnaan- $h$  pelangi- $k$  kuat jika untuk setiap subhimpunan- $k$   $S$  dari  $V(G)$  terdapat pohon Steiner pelangi yang

pohon pelangi. Suatu pohon  $T$  di  $G$  dikatakan pohon pelangi jika tidak ada dua sisi pada pohon memiliki warna yang sama.

Namun, karena indeks pelangi- $k$  adalah bilangan bulat terkecil  $h$  sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi- $k$  hal tersebut tidaklah efisien. Untuk itu, perlu dicari bilangan bulat  $h$  terkecil sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi- $k$ .

Indeks pelangi- $k$  merupakan perumuman dari bilangan terhubung pelangi. Oleh karena itu, jika  $k = 2$  maka  $rx_2(G) = rc(G)$ . Selanjutnya, untuk setiap graf terhubung  $G$  dengan  $|V(G)| = n$ , dapat dicek  $rx_2(G) \leq rx_3(G) \leq rx_4 \leq \dots \leq rx_n(G)$ . Sebagai perumuman dari Persamaan (1), diperoleh:

menghubungkan  $k$  titik tersebut. Indeks pelangi- $k$  kuat dari  $G$ , dinotasikan dengan  $srx_k(G)$ , adalah bilangan bulat terkecil  $h$  sehingga  $G$  memiliki pewarnaan- $h$  pelangi- $k$  kuat.



Gambar 7. Pewarnaan-6 pelangi-3 kuat pada  $F_{10}$

Pada Gambar 7. di atas, didefinisikan pewarnaan-6 pelangi-3 kuat pada  $F_{10}$ . Oleh karena itu, jika dipilih sembarang tiga titik pada  $F_{10}$  terdapat pohon Steiner pelangi yang menghubungkannya.

**Teorema 3.** [6]

Misalkan  $G$  graf terhubung tak trivial dengan ukuran  $m$ , maka  $s diam_3(G) \leq sr x_3 \leq m$ .

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Teorema 4.**

Misalkan  $n$  bilangan bulat dengan  $n \geq 3$ . Misalkan  $L_n$  adalah graf tangga dengan

$2n$  titik dan  $K_{1,r}$  adalah graf bintang dengan  $r + 1$  titik, maka indeks pelangi-3 kuat dari  $L_n \triangleright_0 K_{1,r}$  adalah

$$sr x_3(L_n \triangleright_0 K_{1,r}) \geq sr x_3(L_n) + 2n \|K_{1,r}\|.$$

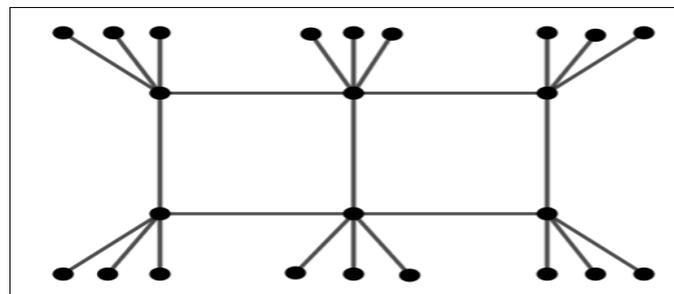
**Bukti:**

Akan dibuktikan

$$sr x_3(L_n \triangleright_0 K_{1,r}) = sr x_3(L_n) + 2n \|K_{1,r}\|.$$

Ditunjukkan terlebih dahulu

$$sr x_3(L_n \triangleright_0 K_{1,r}) \geq sr x_3(L_n) + 2n \|K_{1,r}\|.$$



Gambar 8. Contoh graf hasil operasi  $L_n \triangleright_0 K_{1,r}$  ( $L_3 \triangleright_0 K_{1,3}$ ) dengan titik tempel  $o$  adalah titik 1 pada  $K_{1,r}$

**Klaim 1.**

Setiap sisi pada  $K_{1,r}^i$  dengan  $i \in [1,2n]$  harus diberi warna yang berbeda.

Bukti:

Andaikan ada sisi pada  $K_{1,r}^i$  memiliki warna yang sama. Untuk sembarang  $o \in V(K_{1,r})$  graf hasil operasi kali sisir titik  $L_n$

dengan  $K_{1,r}$  merupakan graf yang memiliki pendaan (titik berderajat 1) pada setiap  $K_{1,r}^i$ . Akibatnya, jika dipilih tiga titik  $u, v$ , dan  $w$  pada  $K_{1,r}^i$  atau  $u \in K_{1,r}^i, v \in K_{1,r}^j$ , dan  $w \in K_{1,r}^k$  dengan  $i, j, k \in [1,2n]$  tidak ada pohon pelangi-3 yang menghubungkan

ketiga titik tersebut. Kontradiksi. Haruslah sisi-sisi pada  $K_{1,r}^i$  dengan  $i \in [1,2n]$  diberi warna yang berbeda. Sehingga diperlukan  $2n \parallel K_{1,r} \parallel$  warna.

**Klaim 2.**

Warna yang dipakai pada sisi pemotong (jembatan) tidak boleh dipakai pada sisi-sisi yang lain.

Bukti:

Andaikan ada sisi  $xy$ , dengan  $xy$  adalah sisi pemotong pada graf  $L_n \triangleright_o K_{1,r}$ , yang diberi warna yang sama dengan suatu sisi  $ab$  dengan  $ab \in E(L_n \triangleright_o K_{1,r})$  dan  $ab$  bukan sisi pemotong. Pilih 3 titik  $x$ ,  $y$ , dan  $b$ . Dengan  $xy$  adalah sisi pemotong dan  $b \in V(L_n \triangleright_o K_{1,r})$ . Karena satu-satunya pohon yang menghubungkan titik  $x$ ,  $y$ , dan  $b$  adalah pohon  $xy, \dots, ab$  akibatnya tidak ada pohon pelangi-3 yang menghubungkan ketiga titik tersebut. Kontradiksi. Warna yang dipakai pada sisi pemotong (jembatan) tidak boleh dipakai pada sisi-sisi yang lain.

Jika diperhatikan, sisi-sisi yang belum diberi warna adalah sisi-sisi  $L_n$ . Berdasarkan (2) dan Teorema 3.,  $srx_3(L_n) \geq sdiam_3(L_n)$ .

Dari **Klaim 1. Dan Klaim 2.** Diperoleh:

$$srx_3(L_n \triangleright_o K_{1,r}) \geq srx_3(L_n) + 2n \parallel K_{1,r} \parallel.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan:

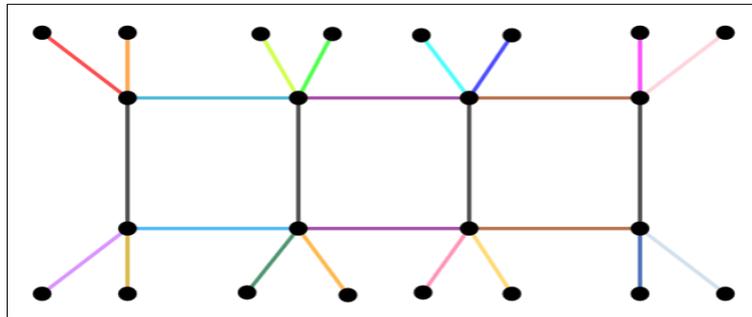
$$srx_3(L_n \triangleright_o K_{1,r}) \leq srx_3(L_n) + 2n \parallel K_{1,r} \parallel.$$

Warnai sisi-sisi pada  $K_{1,r}^i$  dengan  $i \in [1,2n]$  dengan  $2n \parallel K_{1,r} \parallel$  yang berbeda.

Warnai sisi-sisi pada  $L_n$  dengan  $srx_3(L_n)$  warna.

Sehingga terbukti bahwa:

$$srx_3(L_n \triangleright_o K_{1,r}) = srx_3(L_n) + 2n \parallel K_{1,r} \parallel.$$



Gambar 9. Pewarnaan-20 pelangi-3 kuat  $L_4 \triangleright_o K_{1,2}$

**KESIMPULAN**

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan, diperoleh hasil:

Misalkan  $n$  bilangan bulat dengan  $n \geq 3$ . Misalkan  $L_n$  adalah graf tangga dengan  $2n$  titik dan  $K_{1,r}$  adalah graf bintang dengan  $r + 1$  titik, maka indeks pelangi-3 kuat dari  $L_n \triangleright_o K_{1,r}$  adalah

$$srx_3(L_n \triangleright_o K_{1,r}) \geq srx_3(L_n) + 2n \parallel K_{1,r} \parallel.$$

**DAFTAR PUSTAKA**

[1] Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., dan Zhang, P. (2008): The rainbow connection in graphs, *Math Bohem*, 54(2), 75-81

[2] Chartrand, G., Okamoto F., dan Zhang, P. (2010): Rainbow trees in graphs and generalized connectivity, *Networks*, 55, 360-

367

- [3] Chen, L., Li, X., Yang, K., dan Zhao, Y. (2015): The 3-rainbow index of a graph, *Discussiones Mathematicae. Graph Theory*, 35, 81-94
- [4] Diestel, R. (2006): *Graph Theory*, Springer
- [5] Indrajit, R.E. (2011): Fenomena kebocoran data: mencari sumber penyebab dan akar masalah. Tersedia di <http://www.idsirtii.or.id/>. Tanggal akses: Agustus 2020
- [6] Kartika, D. (2017): *Indeks pelangi-3 kuat untuk beberapa operasi graf*, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Bandung
- [7] Kartika, D., Salman, A.N.M., (2019): The 3-rainbow index of some graphs that constructed by joining a graph with a trivial graph, *Journal of Physics: Conference Series*, doi: 10.1088/1742-6596/1127/1/012060
- [8] Li, X., Shi, Y., dan Sun, Y. (2013): Rainbow connections of graphs: a survey, *Graphs and Combinatorics*, 29, 1-38.