

ESTIMASI INTERVAL KEPERCAYAAN PARAMETER SELISIH RATA-RATA IPK KELAS PENDIDIKAN REGULER DAN EKSTENSI FMIPA ANGKATAN 2010 UNIMED DENGAN *BOOTSTRAP PERSENTIL*

Elsa Oktaviani Damanik¹, Elmanani Simamora²
^{1,2}Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Medan
Email:elsad983@gmail.com

ABSTRAK

Dalam menganalisis suatu populasi seringkali peneliti ingin mengetahui karakteristik data penelitian seperti mean, median dan varians data. Kendala dalam menentukan karakteristik data biasanya ketika data yang tersedia di lapangan sedikit dan tanpa asumsi distribusi, sehingga tidak cukup untuk dilakukan analisis secara parametrik. Metode bootstrap merupakan metode *resampling* yang tidak memerlukan asumsi distribusi pada data, bootstrap dilakukan dengan menggunakan distribusi empiris yang diperoleh dari proses pengambilan sampel ulang dari sampel asli, dengan ukuran sama dengan sampel asli dan dilakukan dengan pengembalian. Estimasi interval kepercayaan bootstrap diberikan dalam interval bootstrap standar, interval bootstrap-t, dan interval persentil. Setelah melakukan *resampling* bootstrap ($B=1000$) pada data, mengurutkan nilai dari bawah ke atas. Pada tingkat keyakinan 95% interval kepercayaan akan menjadi $[\hat{\theta}^{25}, \hat{\theta}^{975}]$, artinya batas bawah dari selang adalah nilai kuantil 2,5 dan batas atas selang adalah nilai kuantil 97,5. Setelah dilakukan perhitungan dengan interval persentil diperoleh lebar interval kepercayaan 0,2472. Jika dibandingkan dengan hasil interval bootstrap standar, bootstrap-t dan statistika biasa dengan lebar interval masing-masing 0,3022; 1,5610; dan 0,447124011. Lebar interval yang paling pendek merupakan interval yang ketelitiannya baik, maka dengan lebar interval bootstrap persentil 0,2472 dapat disimpulkan bahwa metode bootstrap persentil merupakan metode yang akurat dalam mengestimasi interval kepercayaan.

Kata kunci: Bootstrap, interval kepercayaan, bootstrap persentil.

ABSTRACT

In analyzing a population often researchers want to know the characteristics of research data such as mean, median and data variance. Constraints in determining the characteristics of the data are usually when the available data in the field is few and without the distribution assumption, so it is not enough to do parametric analysis. The bootstrap method is a resampling method that does not require the assumption of distribution on the data, the bootstrap is performed using empirical distributions obtained from the re-sampling process of the original sample, with the same size as the original sample and done with the return.

Estimated bootstrap confidence intervals are given in standard bootstrap intervals, bootstrap-t intervals, and percentile intervals. After performing a bootstrap resampling ($B = 1000$) in the data, sort the values from the bottom up. At a confidence level of 95% the confidence interval would be $[\hat{\theta}^{25}, \hat{\theta}^{975}]$, meaning the lower bound of the hose is a quantile value of 2.5 and the upper limit of the hose is a 97.5 quantile value. After the calculation with the percentile interval obtained the width of the confidence interval 0.2472. When compared to the results of standard bootstrap intervals, bootstrap-t and regular statistics with an interval width of 0.3022; 1.5610; and 0.447124011. The shortest interval width is a good accuracy interval, with the interval bootstrap width of 0.2472 can be concluded that the percentile bootstrap method is an accurate method in estimating the confidence interval.

Keywords : Bootstrap, the confidence interval, bootstrap percentile.

Pendahuluan

Statistika secara umum terbagi dua yaitu statistik deskriptif dan statistik inferensia. Statistik deskriptif adalah metode-metode yang berkaitan dengan pengumpulan dari penyajian suatu gugus data sehingga memberikan informasi berguna. Statistik deskriptif berkaitan dengan tabel, diagram, grafik dan besaran-besaran seperti rata-rata, modus, kuartil, dan lainnya. Statistik yang berkaitan dengan penarikan kesimpulan dan pendugaan disebut statistik inferensia. Statistik inferensia mencakup metode yang berhubungan dengan sampel untuk kemudian sampai pada peramalan atau penarikan kesimpulan mengenai populasi [1].

Statistika inferensia (induktif) dapat dikelompokkan ke dalam dua bidang yaitu pendugaan parameter dan pengujian hipotesis, sehingga sampai pada kesimpulan yang berlaku umum. Proses pendugaan umumnya digunakan penduga interval (selang), proses pendugaan (mengestimasi) bertujuan untuk mendapatkan gambaran yang jelas tentang distribusi populasi yang tidak diketahui dengan penarikan sampel yang diturunkan dari sebaran populasi (Lungan, 2006).

Menaksir suatu parameter distribusi populasi yang normal digunakan statistika parametris, sedangkan jika distribusi tidak normal atau tidak diketahui (statistika nonparametris), maka penaksiran akan sulit dilakukan. Mengatasi masalah tersebut maka digunakan suatu metode, yaitu Metode Bootstrap yang dapat bekerja pada populasi yang tidak normal bahkan tidak diketahui distribusinya [1].

Bradley Efron memperkenalkan bootstrap pertama kali pada tahun 1979, sebagai metode *resampling* untuk inferensi statistik. Efron dan Tibshirani [2] mengatakan bahwa metode bootstrap merupakan metode yang digunakan untuk mengestimasi suatu distribusi populasi yang tidak diketahui dengan menggunakan distribusi empiris yang diperoleh dari proses pengambilan sampel ulang dari sampel asli, dengan ukuran sama dengan sampel asli dan dilakukan dengan pengembalian. Kedudukan sampel asli dalam metode bootstrap dipandang sebagai populasi. Metode penyampelan ini biasa disebut dengan *resampling* bootstrap [3]. .

Dalam Sahinler dan Topuz [4], menyatakan bahwa bootstrap adalah teknik *resampling* nonparametrik yang

bertujuan untuk menentukan estimasi standar eror dan interval kepercayaan (*interval konfidensi*) dari parameter populasi tanpa mengetahui sebaran data (tanpa asumsi distribusi). Bootstrap dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan dalam statistika baik masalah data yang sedikit, maupun data yang tidak memiliki asumsi dalam distribusinya. Karena pengambilan sampel bootstrap dilakukan berulang kali maka kemampuan komputer yang tinggi diperlukan, sehingga bootstrap dikatakan juga metode berbasis komputer [5].

Artikel ini menunjukkan bahwa lebar interval selisih rata-rata pada sampel yang dihasilkan oleh metode bootstrap persentil akan lebih baik apabila dibandingkan dengan menggunakan metode bootstrap standar, bootstrap-t dan metode statistika biasa yang selama ini digunakan. Metode bootstrap persentil merupakan metode yang akurat dalam mengestimasi interval kepercayaan.

Tinjauan Pustaka

1 Pendugaan Parameter

Statistika inferensia (induktif) adalah statistika yang berkenaan dengan cara penarikan kesimpulan berdasarkan data yang diperoleh dari sampel untuk menggambarkan karakteristik atau ciri dari suatu populasi. Pada statistika inferensia biasanya dilakukan pengujian hipotesis dan pendugaan mengenai karakteristik dari suatu populasi, seperti *mean* dan standar deviasi. Dalam metode klasik, inferensi didasarkan sepenuhnya pada informasi yang diperoleh melalui sampel acak yang diambil dari populasi. Tujuannya ialah untuk meletakkan dasar agar memungkinkan para statistikawan

menarik kesimpulan tentang parameter-populasi dari data percobaan. Jadi setiap kesimpulan yang ditarik mengenai parameter dari suatu sampel yang diamati haruslah tergantung pada pengetahuan tentang distribusi sampel [6].

Menurut Walpole [1] (1993) sembarang nilai yang menjelaskan ciri populasi disebut *parameter*. Parameter populasi ditulis dengan huruf latin θ (baca theta), di mana θ bisa berupa rata-rata populasi, yaitu μ , bisa berupa simpangan baku populasi, yaitu σ , dan bisa berupa proporsi populasi, yaitu p . Statistik dari sampel ditulis dengan huruf $\hat{\theta}$ (baca theta topi), di mana $\hat{\theta}$ bisa berupa rata-rata sampel, yaitu \bar{X} , bisa berupa simpangan baku, yaitu S , dan bisa berupa proporsi sampel, yaitu \hat{p} . Dalam hubungan ini jelas menunjukkan bahwa statistik $\hat{\theta}$ berperan sebagai penduga, sedangkan parameter θ berkedudukan sebagai sesuatu yang diduga. [6].

Proses yang menggunakan statistik yang dihitung dari satu sampel atau lebih untuk menghampiri nilai parameter disebut penaksiran (pendugaan). Seringkali parameter dari suatu populasi tidak diketahui meskipun barangkali distribusi populasi diketahui. Jadi harga parameter sebenarnya yang tidak diketahui akan diduga berdasarkan statistik sampel yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Pendugaan (estimasi) bertujuan untuk mendapatkan gambaran yang jelas tentang ciri-ciri populasi yang tidak diketahui dengan menggunakan informasi sampel atau penduga (*estimator*). [7].

Dugaan terhadap parameter dapat berupa dugaan titik (*point estimation*) dan dapat juga berupa dugaan selang (*interval estimation*).

a) Penduga Titik (*Point Estimate*)

Bila nilai parameter θ dari populasi hanya diduga dengan memakai satu nilai statistik $\hat{\theta}$ dari sampel yang diambil dari populasi tersebut, maka statistik $\hat{\theta}$ disebut pendugaan titik (*point estimate*).

Dalam pendugaan titik, semakin dekat nilai $\hat{\theta}$ (penduga) dengan nilai θ (yang diduga), maka penduga $\hat{\theta}$ akan semakin baik. Namun karena nilai statistik $\hat{\theta}$ yang diperoleh sangat bergantung pada sampel yang diambil dari populasinya, yang cenderung menghasilkan nilai statistik yang berbeda-beda untuk sampel yang berbeda-beda maka dengan pendugaan titik sulit dilakukan. Misalnya, secara umum \bar{x} adalah penduga atau titik taksiran (penduga titik) untuk μ . Penduga titik untuk parameter μ , nilainya akan berlainan bergantung pada harga \bar{x} yang didapat dari sampel-sampel yang diambil. Sehingga dalam praktek pendugaan titik jarang dipakai [6].

b) Penduga Interval (Selang)

Bila nilai parameter θ dari populasi diduga dengan memakai beberapa nilai statistik $\hat{\theta}$ yang berada dalam suatu interval,

$$\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$$

Maka statistik $\hat{\theta}$ disebut penduga interval [6] Nilai taksiran parameter tidak terfokus pada satu titik tetapi di dasarkan pada range tertentu, sehingga estimasinya memiliki nilai tertinggi (batas atas) dan nilai terendah (batas bawah).

2. Metodologi Bootstrap Umum

Metode bootstrap merupakan suatu metode berbasis komputer yang sangat potensial untuk dipergunakan pada masalah ketakstabilan dan keakuratan, khususnya dalam menentukan interval. Istilah bootstrap berasal dari “*pull oneself up by one’s bootstrap*”, yang berarti berpijak di atas kaki sendiri, berusaha dengan sumber daya minimal. Dalam sudut pandang statistika, sumber daya yang minimal adalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari asumsi tertentu, atau data yang tidak mempunyai asumsi apapun tentang distribusi populasinya [8].

Bootstrap adalah suatu metode yang dapat bekerja tanpa membutuhkan asumsi distribusi karena sampel asli digunakan sebagai populasi. Dalam Sahinler dan Topuz [4], Efron menyatakan bahwa bootstrap adalah teknik resampling nonparametrik yang bertujuan untuk menentukan estimasi standar eror dan interval konfidensi dari parameter populasi seperti mean, rasio, median, proporsi, koefisien korelasi atau koefisien regresi tanpa menggunakan asumsi distribusi. Bootstrap dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan dalam statistika baik masalah data yang sedikit, maupun data yang tidak memiliki asumsi dalam distribusinya

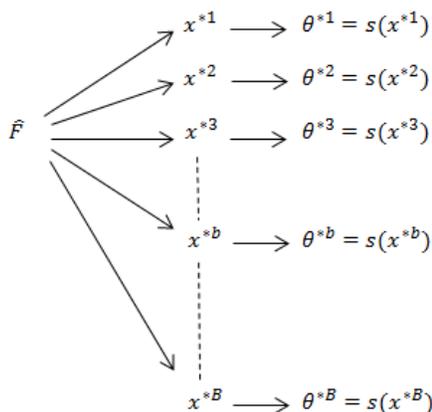
Metode bootstrap terbagi menjadi dua yaitu, metode bootstrap parametrik dan metode bootstrap nonparametrik. Perbedaanannya yaitu metode bootstrap parametrik mengasumsikan sebaran populasi yang telah diketahui, sedangkan metode bootstrap tidak membutuhkan pengetahuan atau asumsi mengenai populasi. Metode bootstrap nonparametrik hanya membutuhkan sebuah sampel tunggal yang mewakili populasi. [9].

Metode bootstrap bergantung atas dugaan sebuah sampel bootstrap. Sebuah sampel bootstrap didefinisikan menjadi sebuah sampel random berukuran n diambil dari \hat{F} , katakan $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, dinotasikan sebagai berikut

$$\hat{F} \rightarrow (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

Notasi bintang menunjukkan bahwa x^* tidaklah himpunan data yang sesungguhnya x , tetapi resample dari himpunan data asli x . Himpunan data bootstrap $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ terdiri dari elemen-elemen dari data asli (x_1, x_2, \dots, x_n) , beberapa elemen bisa saja muncul sekali, dua kali atau tidak muncul sama sekali. Berhubungan dengan himpunan data bootstrap x^* adalah sebuah replikasi bootstrap dari $\hat{\theta}$,

$$\hat{\theta}^* = s(x^*)$$



Gambar 1: Algoritma bootstrap

Dari data observasi (x_1, x_2, \dots, x_n) dihitung suatu statistik $\hat{\theta} = s(x)$ yang merupakan estimator dari parameter populasi $\theta = s(\cdot)$. Untuk suatu sampel bootstrap $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ditentukan $\hat{\theta} = s(x)$ sebagai replikasi bootstrap.

Pengambilan sampel bootstrap sebanyak B , $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_B^*)$, memberikan, $\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*B}$, B replikasi bootstrap untuk $\hat{\theta}$. Estimasi bootstrap untuk distribusi sampling $\hat{\theta}$, dinotasikan \hat{F}^* , merupakan distribusi empiris bootstrap untuk $\hat{\theta}^{*b}$ yang memiliki probabilitas $1/B$ pada setiap $\hat{\theta}^{*b}$, $b = 1, 2, \dots, B$.

Interval konfidensi bootstrap pendekatan normal $(1 - \alpha) \times 100\%$ untuk θ diberikan oleh,

$$\hat{\theta} + z_{\frac{\alpha}{2}} \widehat{se}_B(\hat{\theta}^*) < \theta < \hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \widehat{se}_B(\hat{\theta}^*)$$

1. Metode Analisa

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data IPK alumnus kelas pendidikan reguler dan ekstensi FMIPA angkatan 2010 di Universitas Negeri Medan, dengan asumsi mahasiswa angkatan 2010 sudah selesai mengikuti proses perkuliahan. Penarikan sampel kelas pendidikan reguler dan sampel kelas ekstensi FMIPA menggunakan metode sampel acak bertingkat (*Stratified Random Sampling*) untuk mengelompokkan data, yang mana pada penelitian ini data dikelompokkan berdasarkan IPK. Kemudian dari setiap kelompok diambil sampel dengan menggunakan metode sampel acak sederhana (*Simple Random Sampling*), sampel yang terpilih akan menjadi populasi pada metode bootstrap. Data kelas reguler dan ekstensi akan dikelompokkan menjadi 3 kelompok, seperti tabel di bawah ini.

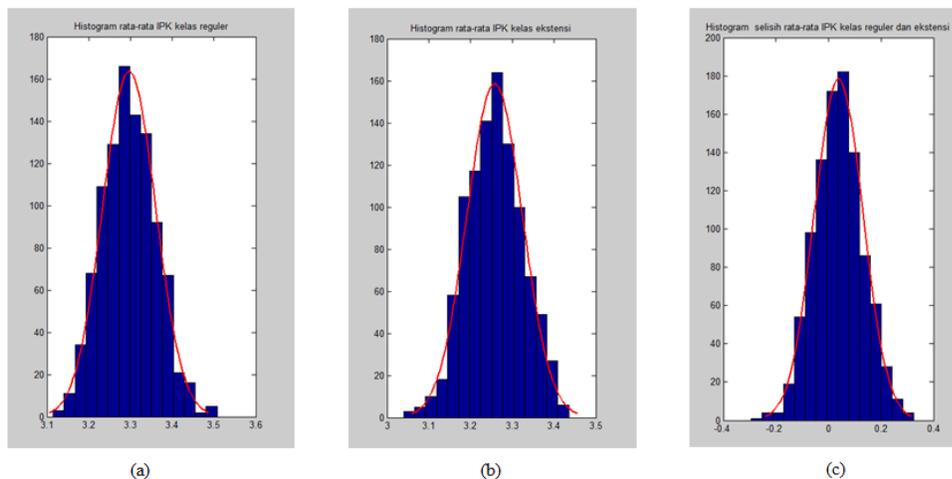
Tabel 1 Kelompok IPK

Kelompok	IPK
1	IPK $\geq 3,51$
2	$3,01 \leq \text{IPK} < 3,50$
3	$2,76 \leq \text{IPK} < 3,00$

Sampel yang terpilih dari kelas reguler dan ekstensi selanjutnya untuk data selisih maka dilakukan operasi pengurangan, data sampel kelas reguler dikurang kelas ekstensi. Sampel data kelas reguler, ekstensi dan selisihnya di *resampling* sebanyak 1000 kali, algoritma *resampling* bootstrap pada kasus estimasi rata-rata dibantu dengan menggunakan program MATLAB 2014a untuk mempermudah peneliti mengatasi

perhitungan yang sangat banyak. *Resampling* bootstrap dari populasi bootstrap dilakukan sebanyak 1000 kali perulangan untuk setiap data kelas reguler, ekstensi dan selisihnya.

Data yang diperoleh dari *resampling* bootstrap kemudian digambarkan dalam bentuk histogram pada MATLAB. Histogram untuk rata-rata bootstrap ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2 : Histogram data rata-rata bootstrap

Pada Gambar 2.2 menunjukkan distribusi dari data kelas reguler, kelas ekstensi dan selisihnya. Ketiga gambar menunjukkan bahwa setelah dilakukan *resampling* bootstrap, asumsi distribusi data menghampiri distribusi normal dengan bentuk histogram yang tampak seperti lonceng, dan standar deviasi yang cenderung kecil. Standar deviasi merupakan ukuran penyebaran data, mencerminkan keragaman data. Jika standar deviasi semakin tinggi maka akan semakin landai bentuk kurvanya dan sebaliknya, semakin kecil standar deviasi maka akan semakin tinggi bentuk puncak kurvanya (mengerucut).

Mengestimasi interval kepercayaan dengan bootstrap dapat digunakan tiga metode yaitu metode bootstrap standar, metode bootstrap-t, dan metode bootstrap persentil. Sebagai bahan perbandingan menentukan interval kepercayaan yang paling akurat, maka peneliti melampirkan perbandingan lebar interval dengan empat metode, yaitu metode bootstrap standar, bootstrap-t, bootstrap persentil dan metode statistika biasa.

Tabel 2: Perbandingan lebar interval pada tingkat kepercayaan 95% untuk selisih rata-rata IPK kelas reguler dan ekstensi

Metode	Batas Atas	Batas Bawah	Lebar Interval
Bootstrap persentil	-0,0206	0,2267	0,2472
Bootstrap standar	-0,1117	0,1905	0,3022
Bootstrap-t	-1,2054	0,3556	1,5610
Statistika normal	-0,18356201	0,263562005	0,447124011

Pada penelitian ini untuk membangun selang kepercayaan yang akurat dengan tingkat kepercayaan 95% digunakan metode bootstrap dengan $B=1000$ sampel bootstrap. Berdasarkan Tabel IV.6 dapat dilihat lebar interval yang dihasilkan menggunakan empat metode, masing-masing 0,2472; 0,3022; 1,5610; dan 0,447124011. Berdasarkan analisa statistik, bila selang kepercayaan semakin sempit maka daerah penolakan dari uji hipotesa normal akan semakin lebar, maka dapat disimpulkan bahwa selang kepercayaan yang pendek merupakan selang kepercayaan yang ketelitiannya baik.

Hasil estimasi yang sangat dekat dengan parameter populasi menunjukkan bahwa metode bootstrap persentil memiliki keakuratan yang tinggi. Maksud dari kata akurat yaitu dengan tingkat kepercayaan yang sama untuk keempat metode, metode bootstrap persentil menghasilkan lebar interval yang lebih pendek daripada metode bootstrap-t, bootstrap standar, dan metode statistika biasa. Maka dengan lebar interval 0,2472 yang dihasilkan bootstrap persentil dapat disimpulkan bahwa bootstrap persentil merupakan metode yang akurat digunakan dalam mengestimasi interval kepercayaan selisih rata-rata IPK kelas reguler dan ekstensi.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan mengenai estimasi interval kepercayaan parameter selisih rata-rata dengan bootstrap persentil maka diperoleh kesimpulan :

Metode bootstrap bekerja dengan resampling data sampel dengan syarat pengembalian pada datanya dalam menyelesaikan statistik ukuran suatu sampel dengan harapan sampel tersebut mewakili data populasi sebenarnya. Bootstrap dapat digunakan sebagai metode alternatif yang memberikan hasil estimasi yang sangat dekat dengan parameter populasi pada sampel kecil dan memungkinkan peneliti untuk melakukan inferensi statistik tanpa membuat asumsi distribusi yang kuat. Sebagai pengganti, bootstrap menggunakan distribusi empiris untuk mengestimasi distribusi sampling. Metode resampling bootstrap dapat dilakukan dengan bantuan software MATLAB 2014a. Program resampling bootstrap menggunakan MATLAB disusun berdasarkan algoritma bootstrap.

Koding yang dibangun pada MATLAB berdasarkan algoritma bootstrap persentil dilampirkan pada Lampiran A

Metode bootstrap persentil dapat digunakan untuk memperoleh estimasi yang baik berdasarkan data minimal

dengan bantuan komputer. Estimasi interval yang baik memberikan interval kepercayaan yang memuat parameter populasi dan dengan lebar interval yang cukup sempit. Hasil penelitian menunjukkan lebar interval yang dihasilkan dengan metode bootstrap standar, bootstrap-t, bootstrap persentil, dan metode statistika biasa yaitu 0,3022; 1,5610; 0,2472; 0,447124011. Lebar interval kepercayaan yang diberikan bootstrap persentil merupakan yang paling kecil yaitu 0,2472, hal ini menunjukkan bahwa metode bootstrap persentil memiliki keakuratan yang tinggi dalam mengestimasi interval kepercayaan

dibandingkan dengan perhitungan secara statistika biasa, bootstrap pendekatan normal (standar) dan bootstrap-t.

Dalam penelitian ini metode bootstrap yang digunakan adalah bootstrap persentil untuk mengestimasi interval kepercayaan, dengan parameter yang diteliti adalah selisih rata-rata. Sebagai bahan perbandingan dalam mengestimasi interval kepercayaan dalam penelitian ini disertakan metode bootstrap-t dan bootstrap standar, untuk penelitian selanjutnya disarankan kepada pembaca untuk mengembangkan penelitian untuk kasus lainnya dengan metode yang berbeda juga, yaitu bootstrap BC_a.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Walpole, R. E., (1993): Pengantar Statistika, Edisi III, PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- [2] Efron, B., dan Tibshirani, R. J., (1993): *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, New York.
- [3] Sungkono, J., (2013): *Resampling Bootstrap pada R*, Magistra, (84 Th XXV).
- [4] Sahinler, S., dan Topuz, D., (2007): *Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithms for Estimation of Regression Parameters*, JAQM, (2), 188-199.
- [5] Simamora, E. dkk., (2015): *Sifat Asimtotik Variansi Kriging Bootstrapping Semiparametrik dalam Simulasi Deterministik*, Disertasi : Matematika Universitas Gadjah Mada, 36-41.
- [6] Boediono dan Koster, W., (2004): *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas*, PT. Remaja Rosdakarya, Bandung.
- [7] Sudjana (2005): *Metode Statistika*, Edisi VI, Tarsito Bandung, Bandung.
- [8] Fauzy, A., Ibrahim, N., Daud, I., dan Abubakar, M. R., (2003): *Interval Selisih Ratarata dengan Metode Bootstrap Persentil*, Jurnal Matematika dan Komputer, 6(3), 188–70.
- [9] Yudistira, A. I. G. A., (2015): *Penerapan Metode Resampling untuk Pendugaan Indeks Kemampuan Proses*, e-Journal WIDYA Eksakta, 1(1), 28–33.