KARISMATIKA
VOL. 5 NO. 2 AGUSTUS 2019

p-ISSN : 2443 - 0366
e-ISSN : 2528 - 0279

PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF CYCLE

Sonli Surya Hati Gultiom*), Mulyono
Jurusan Matematika, Universitas Negeri Medan
Jln. Williem Iskandar Pasar V Medan (20221) telp. (061) 6625973
Email: sonlysuryahati@gmail.com

Abstrak

Pelabelan total sisi ajaib pada sebuah graf G adalah pemetaan satu-satu dari $V\ (G) \cup E(G)$ ke bilangan asli $1{,}2{,}3, \ldots, v + e$, dimana $v = |G|$ dan $e = |G|$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $(x, y) \in E(G)$ berlaku $\lambda x + \lambda xy + \lambda y = k$ untuk setiap konstanta ajaib k. Tujuan penelitian ini untuk mengetahui apakah pelabelan total sisi ajaib berlaku pada graf cycle, mengetahui bagaimana rentang nilai konstanta ajaib yang terbentuk dalam pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle, dan mengetahui cara memberikan label sisi dan titik pada graf cycle untuk nilai konstanta ajaib k. Metode penelitian yang digunakan adalah metode kepustakaan. Penelitian yang dilakukan didalam Perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi.Pengumpulan data dan informasi tersebut tersebut dilakukan dengan bantuan bermacam material yang terdapat diruang perpustakaan seperti buku-buku dan dokumen yang ada. Dari hasil penelitian ini diperoleh pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle C_n, melalui perhitungan dasar dengan mempertimbangkan struktur graf cycle diperoleh rentang nilai konstanta ajaib k yaitu untuk n ganjil adalah $\frac{5n+3}{2} \leq k \leq \frac{7n+3}{2}$ dan untuk n genap adalah $\frac{5n+4}{2} \leq k \leq \frac{7n+2}{2}$.

Kata kunci: Pelabelan total sisi ajaib, Graf cycle.

Abstract

Edges magic labeling on graph G is one-to-one mapping of $V\ (G) \cup E(G)$ into the natural constant $1{,}2{,}3, \ldots, v + e$,, where $v = |G|$, where v = | G | and $e = |G|$ such that for each edge $(x, y) \in E(G)$ apply $\lambda x = \lambda y + \lambda xy + k$ for each magic constant k. Purpose this study to find out if the total labeling edge of miraculous effect on cycle graph, knowing how a magic numbers of value range formed in the magic edge of the total labeling on cycle graph, and know how to provide the label edge and a vertex on the graph cycle to magic constants k. Research methods used are the ordinary method. Research conducted in the library to collect data and information. The information and data collection is done with the help of various kinds of materials contained in the room such as library books and documents. From the results of this research obtained the magic edge of the total labeling on cycle graph C_n, through basic calculations taking into account the structure of the cycle

p-ISSN : 2443 - 0366
e-ISSN : 2528 - 0279

graph obtained magic constant k range is for n odd is $\frac{5n+3}{2} \leq k \leq \frac{7n+3}{2}$ *and for n even is* $\frac{5n+4}{2} \leq k \leq \frac{7n+2}{2}$.

Keyword: Total Magic Edge Labellings, Cycle Graph.

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya, karena banyak sekali permasalahan dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep-konsep matematika. Salah satu cabang dari ilmu matematika yang banyak bermanfaat untuk kehidupan sehati-hari adalah teori graf. Pada tahun 1736 seeorang ahli matematika Leonhard Euler yang berasal dari Swiss, memperkenalkan teori tersebut untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg di kota Kaliningrad,Rusia. Ia memodelkan masalah ini kedalam graf. Daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi Saat ini teori graf berkembang dengan sangat pesat dan banyak sekali pener-apannya didalam ilmu matematika dan ilmu komputer. Salah satu masalah utama dalam teori graf adalah bagaimana cara memberikan label atau menandai sebuah simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*), sehingga setiap simpul dan sisi saling bertetangga (*adjacent*) memiliki tanda yang berbeda [1, 2, 3].

Pelabelan graf merupakan pemberian label atau nilai pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan positif. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli pelabelan dibagi kedalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan himpunan asalnya berupa titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan himpunan asalnya berupa sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan yang himpunan asalnya berupa titik dan sisi [4, 5]

Jika pelabelan yang memenuhi suatu nilai tertentu, maka pelabelan dapat dibedakan menjadi dua yaitu pelabelan ajaib (*magic labelling*) dan pelabelan tidak ajaib (*antimagic labelling*). Dalam pelabelan ajaib, bobot elemen graf yang dievaluasi memenuhi suatu nilai tertentu, nilai ini akan selalu tetap untuk semua elemen yang dievaluasi dan disebut dengan konstanta ajaib. Sedangkan dalam pelabelan tidak ajaib, nilai bobot elemen graf yang dievaluasi berbeda satu dengan yang lainnya [5].

Pelabelan total sisi ajaib pada sebuah graf G adalah pemetaan satu-satu dari $V\ (G) \cup E(G)$ ke bilangan asli $1,2,3, \dots, v + e,$ dimana $v = |G\ |$ dan $e = |G|$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $(x, y) \in\ E(G)$ berlaku $\lambda x + \lambda xy + \lambda y = k$ untuk setiap konstanta ajaib k [6,7]

Dengan demikian penulis mencoba meneliti pelabelan total sisi

p-ISSN : 2443 - 0366
e-ISSN : 2528 - 0279

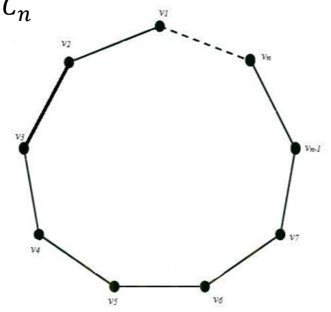
ajaib pada graf cycle. Berdasarkan latar belakang maka rumusan masalah yang diangkat dari penelitian ini adalah (1) Apakah pelabelan total sisi ajaib berlaku pada graf cycle C_n ? (2) Bagaimana rentang nilai konstanta ajaib yang terbentuk dalam pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle C_n ? (3) [8, 9] Bagaimana cara memberikan label sisi dan titik pada graf cycle C_n untuk nilai konstanta ajaib ?

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*). Metode penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi. Pengumpulan data dan informasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan bermacam material yang terdapat diruang perpustakaan seperti buku-buku dan dokumen yang ada. Defenisi-defenisi dan teorema-teorema dalam referensi dikaji ulang, kemudian dirumuskan dalam perumusan masalah, selanjutnya dilakukan langkah-langkah sebagai berikut (1) Mempelajari graf cycle $\boldsymbol{C_n}$,(2) Mempelajari sifat-sifat pelabelan total sisi ajaib, (3) Menemukan algoritma pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle, (4) Menganalisi perhitungan dasar pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle, (5) Mengkontruksikan label simpul dan sisi pada graf cycle dengan algoritma yang ditentukan (6) Menentukan apakah pelabelan total sisi ajaib berlaku pada graf cycle.

HASILDAN PEMBAHASAN

Pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle C_n



Gambar 1. Graf cycle C_n

Dari gambar 1 diatas maka dapat di notasikan himpunan simpul dan sisi sebagai berikut

$V\ (Cn) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$

dan

$$E(\boldsymbol{C_n}) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Berdasarkan hasil penelitian, maka diperoleh , pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle $\boldsymbol{C_n}$ akan disajikan dalam teormea berikut;

Teorema 1 *Setiap graf cycle* $\boldsymbol{C_n}$ *dengan n bilangan asli ganjil dan* $n \geq\ 3$ *memiliki pelabelan total sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil* $k = \frac{5n+3}{2}$.

Bukti: Akan dibuktikan graf cycle C_n dengan n bilangan asli ganjil dan memiliki pelabelan total sisi ajaib. Misalkan graf C_n mempunyai simpul $p = n$ dan sisi $q = n$ karena $p = q$,

p-ISSN : 2443 - 0366
e-ISSN : 2528 - 0279

maka $p + q = 2n$ dengan $V\,(Cn) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(Cn) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Defenisikan fungsi $\boldsymbol{f}$ dari $V\,(C_n) \cup E(C_n)$ ke $1, 2, 3, \dots, 2n$ dengan pengaitan sebagai berikut;

$f(v_i) = \frac{i+1}{2}$, untuk i ganjil $1 \leq i < n$

$f(v_i) = \frac{n+i+1}{2}$, untuk i genap $1 \leq i < n.$

$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i$, untuk i ganjil $1 \leq i < n.$

$f(v_n) = 2n$.
[9, 10]

Berdasarkan pengaitan diatas, jadi f adalah pemetaan bijektif. Maka akan dibuktikan ;

Kasus 1
Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $1 \leq i < n$ dan i ganjil diperoleh;
$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + 2n - i + \frac{n+(i+1)+1}{2} = \frac{5n+3}{2}.$

kasus 2

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan i ganjil diperoleh;

$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{n+(i+1)+1}{2} + 2n - i + \frac{(i+1)+1}{2} = \frac{5n+3}{2}.$

Kasus 3

Untuk sisi $(v_n v_1)$ di C_n diperoleh;

$$f(v_n) + f(v_n v_1) + f(v_1) = \frac{n+1}{2} + 2n + 1 = \frac{5n + 3}{2}$$

Maka, terbukti setiap graf cycle C_n dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$ adalah total sisi ajaib dengan konstanta ajaib nya $\frac{5n+3}{2}$.

Teorema 2 *Setiap graf cycle $\boldsymbol{C_n}$ dengan n bilangan asli genap dan $n \geq 3$ memiliki pelabelan total sisi ajaib dengan konstanta ajaib terkecil $k = \frac{5n+4}{2}$.*

Bukti: Akan dibuktikan graf cycle C_n dengan n bilangana asli genap dan memiliki pelabelan total sisi ajaib. Misalkan graf C_n mempunyai simpul $p = n$ dan sisi $q = n$ karena $p = q$, maka $p + q = 2n$ dengan $V\,(Cn) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(Cn) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Defenisikan fungsi $\boldsymbol{f}$ dari $V\,(C_n) \cup E(C_n)$ ke $1, 2, 3, \dots, 2n$. Misalkan $C_n = C_{2m}$, dimana m bilangan asli ganjil dan genap diperoleh pengaitan sebagai berikut;
Untuk m genap

$f(v_i) = \frac{i+1}{2}$, $\quad i = 1,3, \dots, m+1$

$f(v_i) = 3m,$ $\quad i = 2$

$f(v_i) = \frac{2m+i}{2},$ $\quad i = 4,6, \dots, m$

$f(v_i) = \frac{i+2}{2}$, $\quad i = m+2, m+4, \dots, 2m$

$f(v_i) = \frac{2m+i-1}{2}$, $\quad i = m+3, m+5, \dots, 2m-1$

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{4m-i+3}{2},$ $\quad i = 1$

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{4m-i+2}{2},$ $\quad i = 2$

 p-ISSN : 2443 - 0366
e-ISSN : 2528 - 0279

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{5n-2i}{2}$, $i = 3,5, \dots, m+1$

$f(v_i v_{i+1}) = 4m - i + 1$, $i = 4,6, \dots, m$

$f(v_i v_{i+1}) = 4m - i + 1$, $i = m+2, m+4, \dots, 2m-2$

$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i + 1$, $i = m+3, m+5, \dots, 2m-1$

$f(v_n) = 2n.$

Berdasarkan pengaitan diatas, jadi f adalah pemetaan bijektif. Maka akan dibuktikan ;

Kasus 1

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $i = 1$ diperoleh;

$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + \frac{4m-i+3}{2} + 3m = \frac{5n+4}{2}$

Kasus 2

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $i = 2$ diperoleh;

$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = 3m + \frac{4m-i+3}{2} + \frac{(i+1)+1}{2} = \frac{5n+4}{2}$

Kasus 3

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $3 \leq i \leq m+1$ diperoleh;

$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + \frac{5n-2i}{2} + \frac{(i+1)+2}{2} = \frac{5n+4}{2}$

Kasus 4

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $4 \leq i \leq m$ diperoleh;

$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{2m+i}{2} + (4m - i + 1) + \frac{(i+1)+1}{2} = \frac{5n+4}{2}$

Kasus 5

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $m + 2 \leq i \leq 2m-2$ diperoleh;

$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + (4m - i + 1) + \frac{2n+(i+1)-1}{2} = \frac{5n+4}{2}$

Kasus 6

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $m + 3 \leq i \leq 2m-1$ diperoleh;

$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{2m+i-1}{2} + (2n - i + 1) + \frac{(i+1)+2}{2}$

$= \frac{5n+4}{2}$

Kasus 7

Untuk sisi $v_n v_1$ di C_n diperoleh;

$f(v_n) + f(v_n v_1) + f(v_1) = \frac{i+2}{2} + 2n + 1$

$= \frac{5n+4}{2}$

Untuk m ganjil

$f(v_i) = \frac{i+1}{2}$, $i = 1,3, \dots, m$

$f(v_i) = 3m$, $i = 2$

$f(v_i) = \frac{2m+i+2}{2}$, $i = 4,6, \dots, m-1$

$f(v_i) = \frac{m+3}{2}$, $i = m+1$

$f(v_i) = \frac{i+3}{2}$, $i = m+2, m+4, \dots, 2m-1$

$f(v_i) = \frac{2m+i}{2}$, $i = m+3, m+5, \dots, 2m-2$

$f(v_i) = n + 2$, $i = 2m$

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{4m-i+2}{2}$, $i = 1$

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{4m-i+2}{2}$, $i = 2$

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{5n-2i}{2}$, $i = 3,5, \dots, m+1$

p-ISSN : 2443 - 0366
e-ISSN : 2528 - 0279

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{9m-i-3}{2}$, $i = 4,6,\ldots,m+1$

$f(v_i v_{i+1}) = \frac{8m-i-3}{2}$, $i = 2m-1$

$f(v_n) = 2n.$

Berdasarkan pengaitan diatas, jadi f adalah pemetaan bijektif. Maka akan dibuktikan ;

Kasus 1

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $i = 1$ diperoleh;

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + \frac{4m-i+3}{2} + 3m = \frac{5n+4}{2}$$

Kasus 2

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $i = 2$ diperoleh;

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = 3m + \frac{4m-i+3}{2} + \frac{(i+1)+1}{2} = \frac{5n+4}{2}$$

Kasus 3

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $i = m$ diperoleh;

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + \frac{5n-2i}{2} + \frac{m+3}{2} = \frac{5n+4}{2}$$

Kasus 4

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $4 \leq i \leq m+1$ diperoleh;

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{m+3}{2} + \frac{9m-i-3}{2} + \frac{(i+1)+3}{2} = \frac{5n+4}{2}$$

Kasus 5

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di C_n dengan $i = 2m-1$ diperoleh;

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+3}{2} + \frac{8m-i-3}{2} + (m+2) = \frac{5n+4}{2}$$

Maka, terbukti setiap graf cycle C_n dengan n bilangan asli genap dan $n \geq 3$ adalah total sisi ajaib dengan konstanta ajaib nya $\frac{5n+4}{2}$..

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian yang dilakukan, diperoleh pelabelan total sisi ajaib pada graf cycle C_n dimana $n \geq 3$ dengan konstantan ajaib nya untuk n ganjil adalah $k = \frac{5n+3}{2}$ dan untuk n genap adalah $k = \frac{5n+4}{2}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Nada, B., (2008): Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib Dan Konstanta Ajaib Terkecil Pada Graf Sikel, Lintasan Dan Star, Pusat Perpustakaan UIN Malang, 35–48.

[2] Prihatmaja, P. A., (2017): *Penerapan Teori Graf Dalam Jaringan GSM*, Teknik Elektro dan Informatika, 1–6.

[3] Rosen, K., (2012): *Discrete Mathematics and Its Applications*, Seventh Edition, McGrawHill, New York.

[4] Hariyadi, P. T., (2017): *Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Roda*, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

p-ISSN : 2443 - 0366
e-ISSN : 2528 - 0279

[5] Omer Berkman, d., (2016): All Cycles Are Edge-Magic, Academic College Of Tel Aviv-Yafo, Israel.

[6] W.D Wallis, d., (2000): Edge Magic Total Labelling, Australasian Journal of Combinatorics, **22**(22), 177–189.

[7] S, J., (2007): Pelabelan Graf Siklus Sederhana Untuk Mengkonstruksi Vertex Magic Graph, Pusat Perpustakaan UPI, 9–30.

[8] Simangunsong, J. W., (2015): *Pelabelan Total titik Ajaib pada Graf Petersen yang Diperumum*, 85–89.

[9] Sugeng, K. A., (2005): Magic and Antimagic Labelling of Graphs, University Ballarat, Australia.

[10] Lipschutz, S., (2002): Solved Problems in Discrete Mathematics, Jilid II, McGrawHill, Singapore