

BILANGAN KROMATIK HASIL OPERASI KORONA GRAF LINGKARAN DAN GRAF KUBIK

Septinauli Simanjuntak¹, Mulyono²

^{1,2} Jurusan Matematika-Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/ Universitas Negeri Medan Jalan Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Kotak Pos No. 1589 Medan 20221 A, Sumatera Utara

¹septinajuntak@gmail.com, ²mulyono_mat@yahoo.com

Abstrak— Matematika ialah ilmu yang diterapkan dalam menyelesaikan berbagai persoalan masalah. Peranan penting Matematika didukung dengan perkembangan pengetahuan dan teknologi. Salah satu teori yang memiliki peranan penting dalam matematika adalah teori graf. Terdapat beberapa jenis graf, diantaranya graf lingkaran, graf lengkap, graf kubik, graf Planar. Beberapa objek penelitian yang terdapat pada teori graf yaitu pewarnaan titik dan bilangan kromatik. Terdapat beberapa cara untuk mengoperasikan graf sehingga menghasilkan graf yang baru. Salah satu operasi graf yang digunakan yaitu operasi korona. Tujuan dari penelitian ini yaitu menentukan pola bilangan kromatik dari graf hasil operasi korona dari graf lingkaran dan graf kubik. Pola bilangan kromatik yang diperoleh dari penelitian ini yaitu:

$$\chi(C_n \square Q_m) = \begin{cases} 5, & \text{jika } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

Lebih lanjut, sesuai dengan sifat tidak komutatif pada operasi graf, maka pola bilangan kromatik graf hasil operasi korona graf $\chi(C_n \square Q_m) \neq \chi(Q_m \square C_n)$. Pola bilangan kromatik yang diperoleh dari operasi korona graf $Q_m \square C_n$ yaitu:

$$\text{jika } n \text{ ganjil, maka } \chi(Q_m \square C_n) = 4$$

$$\text{jika } n \text{ genap, maka } \chi(Q_m \square C_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

Keywords : Graf lengkap, Graf lingkaran, Graf kubik, Bilangan kromatik dan Operasi korona.

Abstract— Mathematics is a science that is applied in solving various problems. The important role of Mathematics is supported by the development of knowledge and technology. One theory that has an important role in mathematics is graph theory. There are several types of graphs, including circular graphs, complete graphs, cubic graphs, planar graphs. Some of the research objects contained in graph theory are point coloring and chromatic numbers. There are several ways to operate a graph to produce a new graph. One of the graph operations used is the corona operation. The

purpose of this study is to determine the chromatic number pattern of the corona operation graph of a circular graph and a cubic graph. The pattern of chromatic numbers obtained from this study are:

$$\chi(C_n \square Q_m) = \begin{cases} 5, & \text{for } \frac{m}{2} \text{ even} \\ 3, & \text{for } \frac{m}{2} \text{ odd} \end{cases}$$

Furthermore, according to the non-commutative nature of the graph operation, the chromatic number pattern of the graph is the result of the graph's corona operation. The chromatic number pattern obtained from the corona graph operation is $\chi(C_n \square Q_m) \neq \chi(Q_m \square C_n)$. The chromatic number pattern obtained from the corona graph operation is $Q_m \square C_n$ **that is:**

$$\text{If } n \text{ is odd, then } \chi(Q_m \square C_n) = 4$$

$$\text{If } n \text{ is even, then } \chi(Q_m \square C_n) = \begin{cases} 4, & \text{for } \frac{m}{2} \text{ even} \\ 3, & \text{for } \frac{m}{2} \text{ odd} \end{cases}$$

Keywords : Complete graph, Circle graph, Cubic graph, Chromatic number and Corona operation.

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu ilmu yang digunakan dalam menyelesaikan berbagai persoalan masalah. Peranan penting Matematika didukung dengan berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu teori yang memiliki peranan penting dalam matematika adalah teorigraf. Teori graf bermula pada tahun 1736 ketika L.Euler mempertimbangkan masalah jembatan Konigsberg. L.Euler menemukan jawaban dari masalah tersebut dengan memodelkan masalah tersebut ke dalam graf. Teori graf merupakan salah satu cabang dari matematika yang mempelajari konsep terkait himpunan titik dan himpunan sisi. Selain masalah jembatan Konigsberg, masalah teori graf banyak

dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, antara lain bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan struktur organisasi [1].

Graf merupakan pasangan himpunan (V, E) , dengan V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik, ditulis dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan satu atau dua titik pada graf tersebut, ditulis $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Graf memiliki bermacam-macam jenis yaitu Graf Lengkap, Graf Lingkaran, Graf Kubik, Graf Planar dan lain sebagainya [2].

Terdapat beberapa cara untuk mengoperasikan graf sehingga

menghasilkan graf yang baru. Operasi graf merupakan gabungan dari dua graf yang dioperasikan menggunakan jenis operasi tertentu yang nantinya akan menghasilkan graf yang berbeda dari graf asalnya. Pada penelitian ini, operasi graf yang digunakan yaitu operasi korona yang dinotasikan dengan $G \square H$. Operasi korona didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil duplikat dari graf pertama dan duplikat dari graf kedua, kemudian titik yang ada pada graf pertama dihubungkan kesetiap titik yang ada pada graf kedua dan graf kedua dioperasikan sebanyak titik yang ada pada graf pertama.

Beberapa objek penelitian yang terdapat pada teori graf yaitu pewarnaan titik dan bilangan kromatik. Pewarnaan titik pada suatu graf adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak mendapatkan warna yang sama. Bilangan kromatik dari graf G adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik atau sisi graf G sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan kromatik dari graf G , dilambangkan dengan $\chi(G)$ [3]. Penerapan bilangan kromatik sudah banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari seperti dalam pengaturan lampu lalu lintas di persimpangan dengan menggunakan

algoritma pewarnaan Welch Powel. Selanjutnya bilangan kromatik juga diterapkan dalam masalah penjadwalan. Bilangan kromatik juga digunakan dalam menentukan penempatan barang dari beberapa objek yang berbeda.

Penelitian yang berkaitan dengan Bilangan Kromatik antara lain dengan judul “Bilangan Kromatik Graf Hasil Operasi dan Aplikasinya Pada Permainan Pewarnaan Graf”. Hasil penelitian tersebut diperoleh graf hasil tensor, yaitu $(P_n \otimes C_m), (C_n \otimes C_m)$ dan $(P_n \otimes P_m)$. Graf hasil operasi korona yang diperoleh yaitu $(P_n \circ C_m), (C_n \circ P_m), (C_n \circ C_m)$ dan $(P_n \circ P_m)$ [4]. Penelitian selanjutnya yang

berkaitan dengan Bilangan Kromatik yaitu “Bilangan kromatik graf hasil Amalgamasi dua buah graf” pada penelitian tersebut diperoleh hasil dari hasil Amalgamasi yaitu bilangan kromatik graf hasil amalgamasi $K_m * C_n$ adalah m . Sedangkan

bilangan kromatik graf hasil amalgamasi $W_m^k * W_n^l$ adalah \max $[\chi(W_m^k), \chi(W_n^l)]$ [5]. Penelitian

berikutnya juga berkaitan dengan bilangan kromatik yaitu dengan judul “Bilangan Kromatik Graf Commuting dan Noncommuting Grup Dihedral”. Pada penelitian tersebut diperoleh hasil bilangan

kromatik dari pewarnaan titik graf commuting grup dihedral yaitu $\chi(C(D_{2n})) = n$, untuk n ganjil dan genap. Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf commuting grup dihedral ialah $\chi'(C(D_{2n})) = 2n - 1$, untuk n ganjil dan genap. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf noncommuting grup dihedral yaitu:

$$\chi(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} n+1, & n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}+1, & n \text{ genap} \end{cases}$$

. Selanjutnya diperoleh hasil dari bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf noncommuting grup dihedral ialah:

$$\chi'(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ ganjil} \\ 2n-1, & n \text{ genap} \end{cases} \quad [6].$$

Dalam persoalan yang ada pada teori graf telah banyak para ahli matematika menelitinya, tetapi topik mengenai bilangan kromatik dalam suatu graf merupakan bahasan yang jarang diteliti, terutama mencari bilangan kromatik dari graf yang diperoleh dari hasil operasi korona.

METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan di Digital Library Universitas Negeri Medan yang memiliki beberapa buku yang berkaitan dengan graf dan operasi korona. Waktu penelitian dilakukan kurang lebih dua bulan. Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan

ini adalah riset kepustakaan (*library research*). Riset kepustakaan ialah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi yang digunakan dalam pembahasan masalah dan melakukan penelusuran terhadap beberapa literatur yang mempunyai relevansi dengan topik pembahasan. Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku referensi, jurnal, maupun dokumen-dokumen lain yang berkaitan dengan topic pembahasan. Prosedur pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan teori-teori pendukung mengenai topic yang dibahas dalam penelitian
2. Menggambarkan graf lingkaran C_n dan graf kubik Q_m .
3. Mengoperasikan graf lingkaran C_n dan graf kubik Q_m ke dalam operasi korona.
4. Mewarnai setiap titik pada graf lingkaran C_n dan graf kubik Q_m .
5. Mencari bilangan kromatik dari hasil operasi korona graf lingkaran C_n dan graf kubik Q_m dan mendefinisikannya.
6. Membuktikan pola yang terbentuk sebagai teorema.

7. Menarik kesimpulan.

TABEL I
BILANGAN KROMATIK GRAF

PEMBAHASAN DAN HASIL

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Pada penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik graf hasil operasi korona dari graf lingkaran dan graf kubik dan membuktikan pola yang terbentuk sebagai teorema. Graf lingkaran yang digunakan mulai dari C_3 sampai C_4 dan graf kubik yang digunakan mulai dari Q_4 sampai Q_{16} . Operasi graf yang digunakan yaitu operasi korona. Langkah kerja untuk mencari bilangan kromatik dari graf hasil operasi korona ialah menggambarkan masing-masing graf lingkaran dan graf kubik dengan n yang sudah ditentukan. Setelah itu mengoperasikan graf lingkaran dan graf kubik ke dalam operasi korona. Selanjutnya mewarnai graf hasil operasi korona dan menentukan bilangan kromatik dari hasil operasi korona tersebut. Langkah ini terus dilakukan hingga mendapatkan pola yang terbentuk dari hasil operasi korona. Setelah itu membuktikan pola yang terbentuk sebagai teorema.

Berdasarkan hasil operasi korona dari graf lingkaran dan graf kubik maka pola yang terbentuk yaitu:

$$C_n \square Q_m$$

No	$C_n \square Q_m$	$\chi(C_n \square Q_m)$
1	$C_3 \square Q_4$	5
2	$C_3 \square Q_6$	3
3	$C_3 \square Q_8$	5
4	$C_3 \square Q_{10}$	3
5	$C_3 \square Q_{12}$	5
6	$C_3 \square Q_{14}$	3
7	$C_3 \square Q_{16}$	5
8	$C_4 \square Q_4$	5
9	$C_4 \square Q_6$	3
10	$C_4 \square Q_8$	5
11	$C_4 \square Q_{10}$	3
12	$C_4 \square Q_{12}$	5
13	$C_4 \square Q_{14}$	3
14	$C_4 \square Q_{16}$	5

Teorema 1

Misalkan G adalah graf hasil operasi korona dari graf lingkaran (C_n) dan graf kubik (Q_m). Bilangan kromatik dari graf

$G = (C_n \square Q_m)$, untuk $n \geq 3$ dan $n \geq 4$ adalah:

$$\chi(C_n \square Q_m) = \begin{cases} 5, & \text{jika } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

Selanjutnya akan dibuktikan sifat dari operasi korona

Operasi korona memiliki sifat tidak komutatif. Hal tersebut dikarenakan untuk $G \square H$ berarti graf G sebagai graf kedua harus digandakan sebanyak jumlah titik graf H , kemudian untuk titik ke i dari graf G dihubungkan ke setiap titik di H_i sesuai definisi operasi korona (Mursyidah Himmatul 2014). Untuk membuktikan sifat dari operasi korona tersebut maka akan dilakukan operasi korona dari graf kubik dan graf lingkaran yaitu $Q_4 \square C_3, Q_6 \square C_3, Q_4 \square C_4, Q_6 \square C_4$ dan $Q_6 \square C_4$.

Dari hasil operasi korona dari graf $Q_4 \square C_3, Q_6 \square C_3, Q_4 \square C_4$ dan

jika n ganjil, maka $\chi(Q_m \square C_n) = 4$

$$\text{jika } n \text{ genap, maka } \chi(Q_m \square C_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

$Q_6 \square C_4$ diperoleh pola yang terbentuk adalah:

TABEL II

POLA BILANGAN KROMATIK GRAF

$$Q_m \square C_n$$

No	$Q_m \square C_n$	$(Q_m \square C_n)$
1	$Q_4 \square C_3$	4
2	$Q_6 \square C_3$	4
3	$Q_4 \square C_4$	4
4	$Q_6 \square C_4$	3

Teorema 2

Misalkan G adalah graf hasil operasi korona dari graf kubik (Q_m) dan graf lingkaran (C_n). Bilangan kromatik dari graf $G = (Q_m \square C_n)$, untuk $m \geq 4$ dan $n \geq 3$ adalah:

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari hasil penelitian dan pembahasan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut: Pola bilangan kromatik yang diperoleh dari hasil operasi korona dari graf lingkaran dan graf kubik pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\chi(C_n \square Q_m) = \begin{cases} 5, & \text{jika } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

Lebih lanjut, sesuai dengan sifat tidak komutatif pada operasi graf, maka pola bilangan kromatik graf hasil operasi korona graf $\chi(C_n \square Q_m) \neq \chi(Q_m \square C_n)$. Pola bilangan kromatik yang diperoleh dari operasi korona graf $Q_m \square C_n$ yaitu:

jika n ganjil, maka $\chi(Q_m \square C_n) = 4$

$$\text{jika } n \text{ genap, maka } \chi(Q_m \square C_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Harju, T., (2011): *GraphTheory*, Department of Mathematics, Turku, Finland.
- [2] Gunnar, Brinkmann, J. G. B. D. M., (2011): Generation of Cubicgraphs, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 13(2), 69–80.
- [3] Frisda, Thertiyantus Vinarista1, I. K. B., (n.d.): Bilangan Kromatik Linier Dari Kompleks Persekitaran Graf Sederhana
- [4] Utari, A., (2019): Bilangan Kromatik Graf Hasil Operasi Dan Aplikasinya Pada Permainan Pewarnaan Graf.
- [5] Ridwan, A. d. D., (2013): Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf, *JURNAL SAINS DAN SENI POMITS*, 2(1), 1–5.
- [6] Handrini, Rahayuningtyas, A. A. N., (2015): Bilangan Kromatik Graf Commuting dan Noncommuting Grup Dihedral, 4(1), 16–21.