

PERILAKU SOLUSI PADA MODEL EPIDEMI SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) DENGAN WAKTU TUNDA

Muhammad Aidil Pahlevi¹, Pardomuan Sitompul²

^{1,2} *Jurusan Matematika-Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/ Universitas Negeri Medan Jalan Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Kotak Pos No. 1589*

Medan 20221 A, Sumatera Utara

aidilpahlevi98@gmail.com, ptmath@unimed.ac.id

Abstrak— Model epidemi SIR adalah model penyebaran penyakit yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier. Adanya waktu tunda mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan model epidemi SIR. Waktu tunda menyatakan waktu inkubasi penyakit. Pada penelitian ini, tahapan yang dilakukan untuk mengetahui perilaku solusi model epidemi SIR dengan waktu tunda menggunakan beberapa asumsi, kemudian menentukan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan serta melakukan simulasi numerik menggunakan Matlab. Berdasarkan hasil analisis, model epidemi SIR dengan waktu tunda adalah stabil asimtotik di titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) apabila syarat parameter $A\beta \leq \mu(\mu + \gamma)$ terpenuhi dan stabil di titik kesetimbangan endemik (E_+) apabila syarat parameter $A\beta > \mu(\mu + \gamma)$ terpenuhi. Selanjutnya, dari simulasi menggunakan Matlab diperoleh grafik yang dapat mempermudah menjelaskan perilaku solusinya.

Keywords: Model Epidemi SIR, Waktu Tunda, Kriteria Kestabilan, *Forward Euler*

Abstract— *The SIR epidemic model is a disease spread model in the form of a system of nonlinear differential equations. The time delay affects the stability of the equilibrium point of the SIR epidemic model. The time delay represents the incubation time of the disease. In this study, the steps were carried out to determine the behavior of the SIR epidemic model solution with a time delay using several assumptions, then determining the equilibrium point, analyzing the stability around the equilibrium point and performing numerical simulations using Matlab. Based on the results of the analysis, the SIR epidemic model with a time delay is asymptotically stable at the disease-free equilibrium point (E_0) if the parameter conditions $A\beta \leq \mu(\mu + \gamma)$ have been met and stable at the endemic equilibrium point (E_+) if the parameter conditions $A\beta > \mu(\mu + \gamma)$ have been met. Furthermore, from the simulation using Matlab, a graph is obtained that can make it easier to explain the behavior of the solution.*

Keywords: *SIR Epidemic Model, Time Delay, Stability Criteria, Forward Euler*

PENDAHULUAN

Salah satu alat yang dapat membantu dalam penyelesaian masalah pada kehidupan nyata ialah model matematika.

Diperlukan asumsi-asumsi tertentu untuk membuat masalah-masalah tersebut dapat dibentuk ke dalam model matematika. Selanjutnya, dari model yang didapat dapat dicari solusinya, baik melalui analisis maupun numerik.

Penyebaran suatu penyakit merupakan salah satu permasalahan pada kehidupan nyata. Pada tahun 1927, W.O. Kermack dan A. G. Mckendrick di dalam makalahnya yang berjudul "A Contribution to the mathematical Theory of Epidemics" telah memperkenalkan sebuah model penyebaran penyakit. Model matematika yang dimaksud adalah model epidemi SIR. Epidemi adalah suatu keadaan di mana suatu penyakit menular berjangkit dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan kejadian normal pada periode yang singkat. Ketika penyakit tersebut selalu terdapat dalam suatu tempat begitu juga dengan faktor penyebabnya maka disebut *endemic*, kemudian ketika penyakit tersebut mempunyai ruang lingkup penyebaran yang sangat luas (global) maka disebut *pandemic*. Model epidemi merupakan model matematika yang dipakai untuk mengetahui penyebab penyakit menular, khususnya menyangkut terjadi atau tidaknya keadaan epidemi dan imbas yang ditimbulkan.

Di dalam model epidemi SIR, populasi dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu

Susceptible (S), *Infected (I)*, dan *Recovered (R)*. *S* adalah kelompok individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat terinfeksi penyakit, *I* adalah kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh, dan *R* adalah kelompok individu yang telah sembuh atau kebal terhadap penyakit.

Di dalam model epidemi, laju penularan atau laju insidensi memainkan peranan penting karena menerapkan laju insidensi yang berbeda dapat berpotensi mengubah perilaku sistem. Jumlah individu yang terinfeksi per unit waktu di dalam model epidemi disebut laju insidensi. Laju insidensi telah didefinisikan dengan banyak cara. Yaitu laju insidensi bilinear, laju insidensi standar dan laju insidensi jenuh.

Sampai hari ini, model epidemi SIR telah banyak dikembangkan oleh para ahli. Beberapa penelitian tentang model epidemi SIR dengan *vital dynamics*, di mana pada populasi terjadi kelahiran dan kematian [3], serta laju insidensi bilinear yang dijadikan rujukan dalam penelitian ini, yaitu jurnal di dalam [11]. Pada jurnal tersebut, model epidemi SIR dengan adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= A - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t)\end{aligned}$$

di mana A adalah laju kelahiran, μ adalah kematian alami populasi, γ adalah laju kesembuhan individu yang terinfeksi, dan β adalah laju penularan/insidensi penyakit.

Penyakit menular seperti TBC, DBD, malaria, serta Covid-19 memiliki waktu inkubasi, yaitu interval antara masuknya bibit penyakit ke dalam tubuh manusia sampai dengan pertama kali menunjukkan gejala penyakit atau dapat menularkan penyakit ke individu rentan [13]. Waktu inkubasi dapat diterapkan ke dalam model epidemi SIR sebagai waktu tunda. Model

epidemi SIR dengan waktu tunda dikaji di dalam persamaan diferensial tunda (*delay-differential equation*).

Persamaan diferensial tunda adalah persamaan diferensial yang tidak hanya bergantung kepada waktu sekarang tetapi juga bergantung kepada waktu sebelumnya [7]. Persamaan diferensial tunda awalnya diperkenalkan pada abad ke-18 oleh Laplace dan Condorcet. Waktu tunda penting dalam pemodelan masalah nyata karena keputusan biasanya dibuat berdasarkan informasi pada

waktu sebelumnya. Selain itu, waktu tunda juga dapat mengubah perilaku sistem.

Pada umumnya persamaan diferensial tunda lebih sulit untuk mencari penyelesaiannya dari pada persamaan diferensial biasa. Salah satu cara untuk mencari perilaku solusi persamaan diferensial tunda adalah dengan menggunakan kestabilan nilai eigen untuk menganalisis kestabilan solusi dari persamaan differensial tunda. Selain itu, untuk memvisualisasikan solusi dari persamaan diferensial tunda dapat menggunakan simulasi Matlab

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yang bertujuan untuk menganalisis perilaku kestabilan pada model penyebaran penyakit yang telah dibangun. Adapun prosedur penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan teori - teori pendukung dan referensi yang berkaitan dengan model epidemi SIR dalam penelitian.
2. Menentukan model epidemi SIR dengan waktu tunda dan laju insidensi bilinier.

3. Menentukan Titik Keseimbangan dari model epidemi SIR tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda.
4. Melakukan linierisasi dengan matriks Jacobian, mendapatkan nilai eigen untuk mengetahui jenis kestabilan model.
5. Menyelesaikan simulasi menggunakan Matlab, membangun suatu program untuk membantu pengamatan perilaku solusi sistem persamaan diferensial tunda epidemi SIR dengan mengambil parameter yang bersesuaian untuk memperlihatkan perilaku solusi model epidemi SIR.
6. Mengamati hasil simulasi Matlab dari perilaku solusi sistem persamaan diferensial tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda.
7. Akhirnya dari hasil penelitian ini akan ditarik suatu kesimpulan tentang perilaku solusi sistem persamaan diferensial epidemi SIR dengan waktu tunda dan tanpa waktu tunda.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Epidemi SIR Dengan Waktu Tunda

Berikut ini adalah model epidemi SIR dengan waktu tunda berdasarkan asumsi Cooke pada Jurnal di [14]:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= A - \mu S(t) - \beta S(t)I(t - \tau) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t - \tau) - \mu I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t)\end{aligned}\tag{2}$$

Keterangan :

$\frac{dS(t)}{dt}$: Kelompok individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat terinfeksi penyakit pada saat t

$\frac{dI(t)}{dt}$: Kelompok individu yang terinfeksi dan dapat

sembuh pada saat t

$\frac{dR(t)}{dt}$: Kelompok individu yang telah sembuh atau kebal terhadap penyakit pada saat t

A : Laju kelahiran populasi

μ : Laju kematian populasi

γ : Laju kesembuhan populasi yang terinfeksi
 τ : Waktu tunda/waktu inkubasi penyakit

B. Titik Kestimbangan Model Epidemik SIR

Jurnal [5] menjelaskan bahwa titik kesetimbangan Sistem (1) dapat ditentukan dengan menetapkan turunan dari persamaan sama dengan nol. Secara matematis, hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

Setelah menyelesaikan masing-masing persamaan pada Sistem (1) diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu :

$$E_+ = (S_+, I_+, R_+) = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \frac{A}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{A\gamma}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\gamma}{\beta} \right)$$

Syarat parameter terjadi titik kesetimbangan endemik adalah

$$I > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta} > 0 \Leftrightarrow A\beta > \mu(\mu + \gamma)$$

Jadi, agar $I > 0$ maka $A\beta > \mu(\mu + \gamma)$. Apabila $I = 0$ diperoleh $A\beta = \mu(\mu + \gamma)$ yang merupakan syarat parameter terjadinya titik kesetimbangan bebas penyakit.

Untuk titik kesetimbangan pada Sistem (2) diasumsikan bawah perpindahan jarak pada titik kesetimbangan yang diakibatkan oleh waktu tunda τ sangat kecil, sehingga perpindahan jarak tersebut dapat diabaikan. Sehingga titik kesetimbangan Sistem (2) dapat dievaluasi dengan menggunakan titik kesetimbangan pada Sistem (1).

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I^* & -\beta S^* e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \beta I^* & -(\mu + \gamma) + \beta S^* e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Di mana S^*, I^*, R^* adalah titik kesetimbangan.

1) Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (E_0)

Titik kesetimbangan bebas penyakit terjadi pada model epidemi SIR apabila $I = 0$, artinya tidak terdapat individu yang terinfeksi penyakit pada suatu populasi. Oleh karena itu, dari Sistem (1) diperoleh titik kesetimbangan :

$$E_0 = (S_0, I_0, R_0) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0 \right)$$

2) Titik Kesetimbangan Endemik (E_+)

Titik kesetimbangan endemik terjadi apabila penyakit selalu ada dalam populasi tersebut, maksudnya adalah bahwa selalu saja ada individu yang terserang penyakit. Titik kesetimbangan endemik terjadi pada model epidemi SIR apabila $I > 0$. Adapun titik kesetimbangan endemik, yaitu :

(3)

C. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Agar Sistem (2) dapat diselesaikan secara eksplisit, perlu dilakukan pelinieran [4]. Pelinieran pada sistem persamaan diferensial tunda dapat dilakukan melalui matriks Jacobian [10] sebagai berikut :

$$J = J_t + J_\tau e^{-\lambda\tau} \quad (4)$$

di mana J_t adalah matriks Jacobian yang bersesuaian dengan $x(t)$ dan J_τ adalah matriks Jacobian yang bersesuaian dengan $x(t - \tau)$.

Dari Persamaan (4) diperoleh matriks Jacobian untuk Sistem (2)

Kestabilan pada Sistem (2) dapat dilihat dari nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik. Adapun persamaan karakteristik [2] pada sistem persamaan diferensial adalah $\det(\lambda I - J) = 0$

pun matriks Jacobian yang dievaluasi dari titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \frac{A}{\mu} e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & -(\mu + \gamma) + \beta \frac{A}{\mu} e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dengan mensubstitusi Matriks (7) ke dalam Persamaan (6) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$
 $\lambda_2 = \beta \frac{A}{\mu} e^{-\lambda_2\tau} - (\mu + \gamma)$
 $\lambda_3 = -\mu$

Apabila $\tau = 0$, diperoleh $\lambda_2 = \beta \frac{A}{\mu} - (\mu + \gamma)$. Dari uraian di atas, $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$, sedangkan untuk λ_2 ada beberapa kemungkinan, yaitu :

- Apabila $\lambda_2 < 0$, maka Sistem (2) stabil asimtotik di titik kesetimbangan bebas penyakit pada saat $\tau = 0$.

$$\lambda_2 - \beta \frac{A}{\mu} e^{\lambda_2\tau} - (\mu + \gamma) = 0$$

$$(iw) - \beta \frac{A}{\mu} e^{(iw)\tau} - (\mu + \gamma) = 0$$

$$(\mu + \gamma) - \beta \frac{A}{\mu} \cos(w\tau) + i \left(w + \beta \frac{A}{\mu} \sin(w\tau) \right) = 0$$

Kemudian pisahkan bagian real dan imajinerinya lalu mengkuadratkan masing-masing persamaan serta menjumlahkannya

$$w^2 = \left(\beta \frac{A}{\mu} \right)^2 - (\mu + \gamma)^2 \quad (8)$$

Berdasarkan teorema kestabilan pada [9], ada beberapa kemungkinan untuk w^2 , yaitu :

- Apabila $w^2 < 0$, maka $\lambda_2 < 0$, dan tidak terdapat akar imajiner murni. Sehingga Sistem (2) stabil asimtotik di titik kesetimbangan bebas penyakit pada saat $\tau > 0$.

Berikut ini adalah analisis kestabilan Sistem (2) untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik.

1) Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (E_0) (6)

Ada

- Apabila $\lambda_2 = 0$, maka Sistem (2) stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit pada saat $\tau = 0$.
- Apabila $\lambda_2 > 0$, maka Sistem (2) menjadi tidak stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit dan mengakibatkan $I > 0$. Sehingga terjadi endemik pada Sistem (2) pada saat $\tau = 0$.

Kemudian, untuk $\tau > 0$, Pada Jurnal [12], untuk menentukan persamaan karakteristik tunda, misalkan $\lambda_2 = iw$ di mana $w > 0$, maka diperoleh

untuk mengeleminasi τ . Sehingga diperoleh persamaan karakteristik

- Apabila $w^2 = 0$, maka $\lambda_2 = 0$, dan tidak terdapat akar imajiner murni. Sehingga Sistem (2) stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit pada saat $\tau > 0$.
- Apabila $w^2 > 0$, maka Sistem (2) menjadi tidak stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit pada

saat $\tau > 0$ dan mengakibatkan $I > 0$ pada saat $\tau > 0$ karena $\beta A > \mu(\mu + \gamma)$. Sehingga terjadi endemik pada Sistem (2).

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\beta A}{\mu + \gamma} & -(\mu + \gamma)e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \frac{\beta A}{\mu + \gamma} - \mu & -(\mu + \gamma) + (\mu + \gamma)e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dengan mensubstitusi Matriks (9) ke dalam Persamaan (6) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$ dan persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + (a + b)\lambda + c + [-a\lambda - d]e^{\lambda\tau} = 0$$

Di mana

$$a = (\mu + \gamma), b = \frac{\beta A}{\mu + \gamma}, c = \beta A, d = \mu(\mu + \gamma)$$

Apabila $\tau = 0$, dari Persamaan Karakteristik (10) diperoleh

$$\lambda^2 + \frac{\beta A}{\mu + \gamma} + \beta A - \mu(\mu + \gamma) = 0$$

Sehingga diperoleh akar-akar persamaan karakteristik

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\frac{\beta A}{\mu + \gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta A}{\mu + \gamma}\right)^2 - 4(\beta A - \mu(\mu + \gamma))}}{2}$$

Dari akar persamaan karakteristik di atas, berikut uraian $\lambda_{2,3}$: Misalkan $\alpha_1 = \frac{\beta A}{\mu + \gamma}$ dan $\alpha_2 = \beta A - \mu(\mu + \gamma)$. Menurut kriteria Routh-Hurwitz yang dijelaskan dalam [6], Sistem (2) tidak memiliki akar real positif apabila $\alpha_1 > 0$ dan $\alpha_2 > 0$. Untuk $\alpha_1 > 0$,

$$(w_{\pm})^2 = \frac{-((a+b)^2 - a^2 - 2c) \pm \sqrt{((a+b)^2 - a^2 - 2c)^2 - 4(c^2 - d^2)}}{2}$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, apabila $((a + b)^2 - a^2 - 2c) > 0$ dan $(c^2 - d^2) > 0$ maka tidak ada akar w real positif sehingga $\lambda_{2,3}$ Persamaan Karakteristik (10) bernilai negatif. Selanjutnya, dari Persamaan (12), dapat ditunjukkan bahwa $((a + b)^2 - a^2 - 2c) > 0$ dengan mensubstitusikan Persamaan (11) sehingga diperoleh $((a + b)^2 - a^2 - 2c) = \frac{\beta A}{\mu + \gamma} >$

2) *Titik Kesetimbangan Endemik (E_+)*
Adapun matriks Jacobian yang dievaluasi dari titik kesetimbangan endemik (E_+) adalah

telah terbukti bahwa $\frac{\beta A}{\mu + \gamma} > 0$, sedangkan untuk α_2 ada beberapa kemungkinan, yaitu :

- (10) • Apabila $\alpha_2 < 0$, maka hal tersebut tak mungkin terjadi karena mengakibatkan $I < 0$ pada saat $\tau = 0$.
- (11) • Apabila $\alpha_2 = 0$, maka $\lambda_{2,3}$ akan memiliki satu akar negatif dan satu akar nol. Oleh karena itu, Sistem (2) stabil di titik kesetimbangan endemik pada saat $\tau = 0$.
- Apabila $\alpha_2 > 0$, maka $\lambda_{2,3}$ tidak memiliki akar positif. Oleh karena itu, Sistem (2) stabil asimtotik di titik kesetimbangan endemik pada saat $\tau = 0$.

Kemudian, untuk $\tau > 0$, misalkan $\lambda = iw$ di mana $w > 0$. Substitusikan ke Persamaan (10), lalu melakukan langkah yang sama seperti di atas sehingga diperoleh akar-akar persamaan karakteristik

(12)

0. Kemudian, untuk $(c^2 - d^2)$ ada beberapa klaim, yaitu :

- Apabila $(c^2 - d^2) < 0$, maka hal tersebut tak mungkin terjadi karena mengakibatkan $I < 0$ pada saat $\tau > 0$
- Apabila $(c^2 - d^2) = 0$, maka terdapat dua akar w^2 , yaitu w_1^2 bernilai nol yang mengakibatkan $\lambda_{2,3} = 0$ dan w_2^2 bernilai negatif

yang mengakibatkan $\lambda_{2,3}$ bernilai negatif. Oleh karena itu, Sistem (2) stabil di titik kesetimbangan endemik pada saat $\tau > 0$

- Apabila $(c^2 - d^2) > 0$, maka $\lambda_{2,3}$ tidak memiliki akar positif. Oleh karena itu, Sistem (2) stabil asimtotik di titik kesetimbangan endemik pada saat $\tau > 0$

D. Simulasi Numerik

Kestabilan Sistem (2) dapat digambarkan melalui bidang fase untuk lebih memahami perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Nilai parameter yang digunakan berdasarkan referensi jurnal pada [1]. Berikut ini adalah parameter-parameter yang digunakan untuk menggambarkan kestabilan sistem.

TABEL 1
NILAI PARAMETER YANG DIGUNAKAN UNTUK SIMULASI NUMERIK

Kasus	A	μ	β	γ
1	0,95	0,05	0,1	0,5
2	0,95	0,05	0,01	0,5

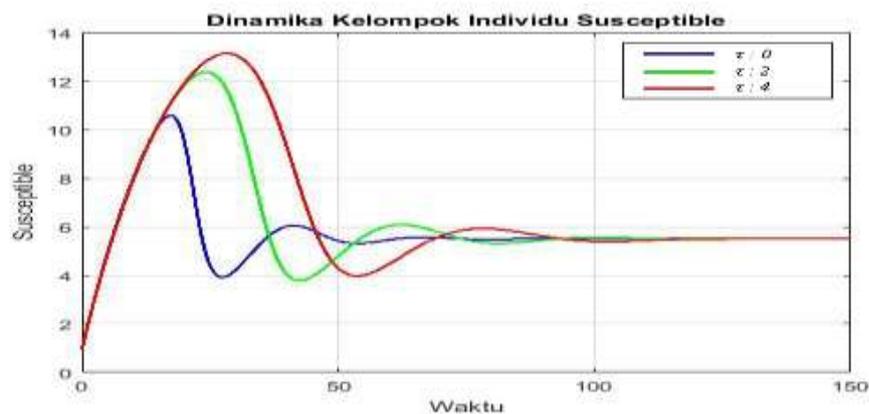
Nilai awal yang digunakan untuk simulasi model epidemi SIR adalah $S(0) = 0,95$, $I(0) = 0,05$ dan $R(0) = 0$ dengan waktu tunda 0, 2, dan 4.

Metode numerik merupakan teknik-teknik yang dipakai untuk merumuskan masalah-masalah matematika supaya bisa diselesaikan menggunakan operasi aritmatika [8]. Salah satu metode numerik yang akan dipakai untuk menggambar bidang fase Sistem (2) adalah dengan metode *Forward Euler*.

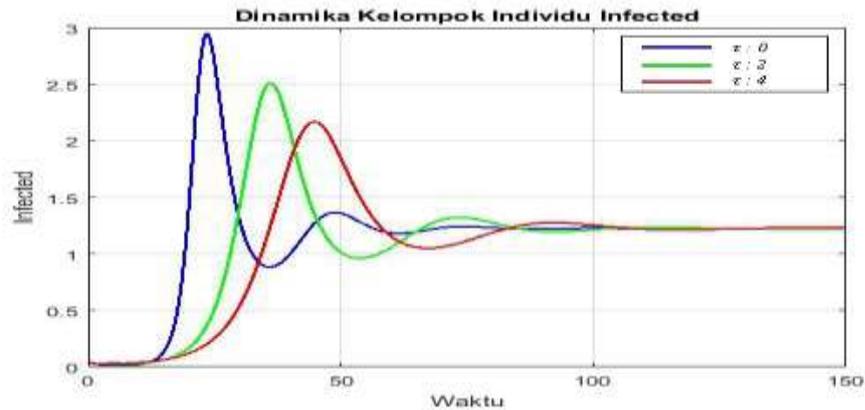
Berikut ini merupakan grafik dinamika populasi pada model epidemi SIR yang diperoleh dari hasil simulasi numerik.

1) Kasus 1

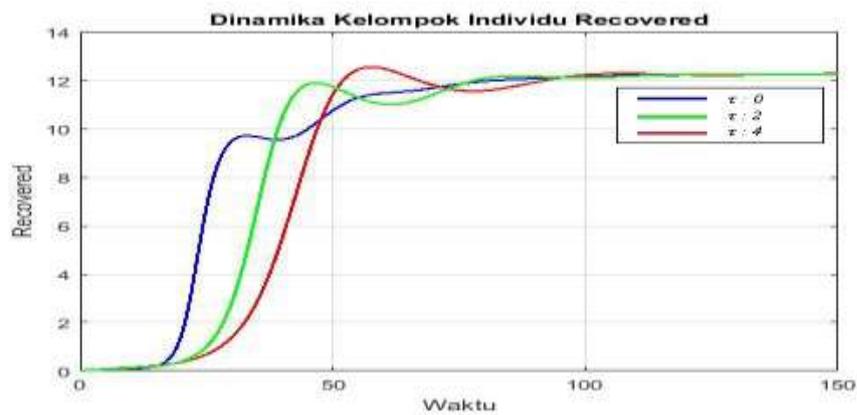
Titik Kesetimbangan yang diperoleh dengan menggunakan parameter pada Kasus 1 adalah $E_0 = (S_0 = 19, I_0 = 0, R_0 = 0)$ dan $E_+ = (S_+ = 5,5, I_+ = 1,23, R_+ = 12,27)$



Gambar 1 Grafik perilaku solusi kelas individu *susceptible* terhadap waktu



Gambar 2 Grafik perilaku solusi kelas individu *infected* terhadap waktu



Gambar 3 Grafik perilaku solusi kelas individu *recovered* terhadap waktu

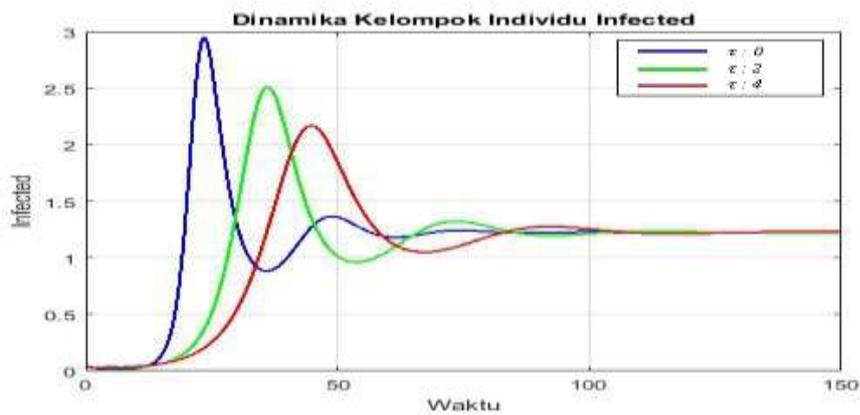
Dari hasil simulasi di atas, dapat disimpulkan bahwa Sistem (2) dengan menggunakan parameter pada Kasus 1 stabil di titik kesetimbangan endemik $E_+ = (S_+ = 5,5 \ I_+ = 1,23 \ R_+ = 12,27)$ untuk $\tau \geq 0$. Dengan memberikan waktu tunda pada model akan menyebabkan kelompok individu tiap-tiap kelas membutuhkan waktu lebih lama untuk mencapai kestabilan.

2) Kasus 2

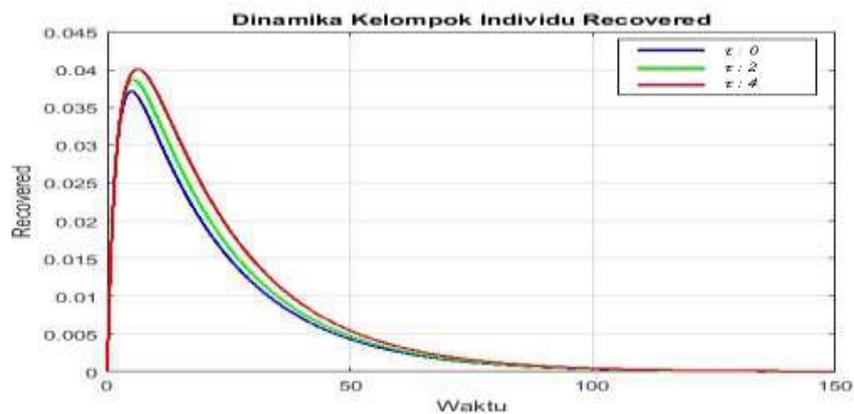
Titik Kesetimbangan yang diperoleh dengan menggunakan parameter pada Kasus 2 adalah $E_0 = (S_0 = 19 \ I_0 = 0 \ R_0 = 0)$ dan $E_+ = (S_+ = 5,5 \ I_+ = -3,27 \ R_+ = -32,73)$. Titik kesetimbangan E_+ dapat diabaikan karena populasi bernilai negatif.



Gambar 4 Grafik perilaku solusi kelas individu *susceptible* terhadap waktu



Gambar 5 Grafik perilaku solusi kelas individu *infected* terhadap waktu



Gambar 6 Grafik perilaku solusi kelas individu *recovered* terhadap waktu

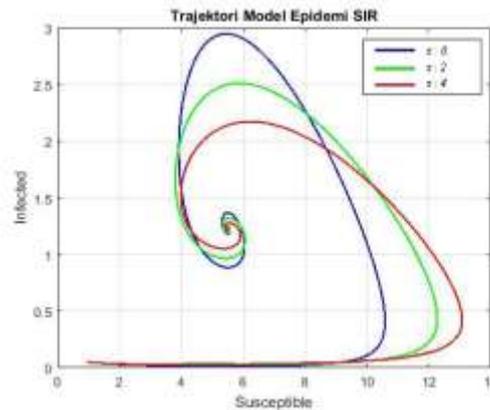
Dari hasil simulasi di atas, dapat disimpulkan bahwa Sistem (2) dengan menggunakan parameter pada Kasus 1 stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S_0 = 19 \ I_0 = 0 \ R_0 = 0)$ untuk $\tau \geq 0$. Dengan memberikan waktu tunda pada model akan menyebabkan kelompok

individu tiap-tiap kelas membutuhkan waktu lebih lama untuk mencapai kestabilan.

E. Trajektori Pada Model Epidemii SIR

Berikut ini merupakan trajektori pada model epidemii SIR dengan menggunakan parameter pada Tabel 1.

1) Kasus 1

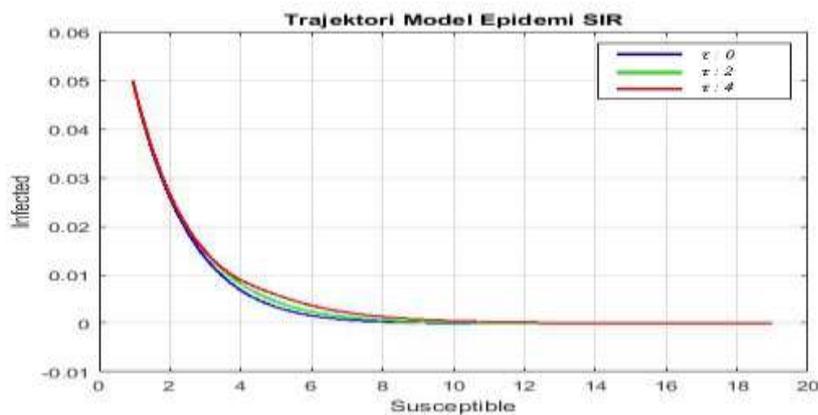


Gambar 7 Trajektori model epidemi SIR untuk Kasus 1

Bidang Trajektori di atas menunjukkan bahwa Sistem (2) memiliki tipe kestabilan spiral dan jenis kestabilan stabil asimtotik di titik kesetimbangan endemik $E_+ = (S_+ = 5,5 \ I_+ = 1,23 \ R_+ = 12,27)$ serta tidak stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S_0 = 19 \ I_+ = 0 \ R_+ = 0)$.

Terlihat bahwa pada Gambar 7 populasi pada kelas S dan I bergerak menuju satu titik yang menunjukkan penyakit pada populasi tersebut akan selalu ada dan penyakit dapat dikendalikan. Hal ini berarti parameter yang terbentuk memenuhi syarat parameter endemik.

2) Kasus 2



Gambar 8 Trajektori model epidemi SIR untuk Kasus 2

Bidang Trajektori di atas menunjukkan bahwa Sistem (2) memiliki tipe kestabilan node dan jenis kestabilan stabil asimtotik di titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S_0 = 19 \ I_0 = 0 \ R_0 = 0)$ serta tidak stabil di titik kesetimbangan endemik $E_+ = (S_+ = 5,5 \ I_+ = -3,27 \ R_+ = -32,73)$.

Terlihat bahwa pada Gambar 8 populasi pada kelas I akan mengalami penurunan dan akan menuju nol seiring bertambahnya populasi pada kelas S . Hal ini berarti parameter yang terbentuk memenuhi syarat parameter bebas penyakit.

PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh bahwa model epidemi SIR akan stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ untuk $\tau \geq 0$ apabila syarat parameter $A\beta \leq \mu(\mu + \gamma)$ terpenuhi. Sedangkan pada titik kesetimbangan endemik $E_+ = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{A}{\mu+\gamma} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{A\gamma}{\mu(\mu+\gamma)} - \frac{\gamma}{\beta}\right)$ model epidemi SIR stabil untuk $\tau \geq 0$ apabila syarat parameter $A\beta > \mu(\mu + \gamma)$ terpenuhi. Waktu tunda pada model hanya memperlambat laju penularan penyakit antara individu yang rentan dan individu yang telah terinfeksi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ali, M.A., dan dkk, "Numerical Analysis of a Modified SIR Epidemic Model with the Effect of Time Delay", *Journal of Mathematics*, vol. 51, pp. 79-90, 2019.
- [2] Anton, H., dan Chris, R., *Elementary Linear Algebra*, 11th Edition, Wiley, United State of America, 1994.
- [3] Beretta, E., dan Takeuchi, Y., "Global Stability of an SIR epidemic model with time delays", *Journal of Mathematical Biology*, vol. 33, pp. 250-260, 1995.
- [4] Boyce, W.E., dan DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Edisi ke-9, John Wiley and Sons Inc, United State of America, 2009.
- [5] Cain, J. W., dan Reynolds, A. M., *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical System*, Virginia Commonwealth, University Mathematics, 2010.
- [6] Gonze, D., dan Kauffman, G., "Theory of Non-linear Dynamical Systems", *Mathematics*, pp. 34-36, 2015.
- [7] Haberman, R., *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Populations Dynamics and Traffic Flow*, Siam, Dallas, 1998.
- [8] Heri, S., dan R., D., *Metode Numerik dengan Pendekatan Algoritma*, Sinar Baru Algensindo, Bandung, 2005.
- [9] Kar, T. K., "Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay", *IJSBAR*, vol. 38, pp. 449-458, 2003.
- [10] M, L., dan Senthilkumar, *Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems*, Springer Verlag, Berlin Heildelberg, 2010.
- [11] N. Kausar, M. R., dan M., G., "A Numerical Study of SIR Epidemic Model", *IJSBAR*, vol. 25, no. 2, pp. 354-363, 2016.
- [12] Nonthakorn dan Guan, X., "Mathematical Analysis of a Single-Species Population Model in a Polluted Environment with Discrete Time Delays", *Worcester Polytechnic Institute*, pp. 1-56, 2016
- [13] Rajab, W., *Epidemiologi untuk Mahasiswa Kebidanan*, Kedokteran EGC, Jakarta, 2008.
- [14] Wanbio Ma, M. S., dan Takeuchi, Y., "Global Stability of an SIR Epidemic Model With Time Delay", *Applied Mathematics Letters*, vol. 17, pp. 1141-1145, 2004.