

ANALISIS SENSITIVITAS DAN KONTROL OPTIMAL MODEL SEIR PENYEBARAN COVID-19 DI INDONESIA

Nailan Ni'mah Nasution¹, Lasker P. Sinaga²

^{1,2} Jurusan Matematika, Universitas Negeri Medan, Jalan Willem Iskandar Pasar V,
Medan 20221, Indonesia

¹nailannimah00@gmail.com, ²lazer_integral@yahoo.com

Abstrak— Covid-19 (Coronavirus Disease) merupakan penyakit yang menyerang sistem pernafasan akibat infeksi SARS-CoV-2 (Severe Acute Respiratory Syndrome 2). Wabah ini ditemukan pertama kali di Wuhan, provinsi Hubei, Cina pada Desember 2019 dan menyebar dengan cepat ke berbagai negara sehingga dinyatakan sebagai pandemi pada Maret 2020. Sebagai upaya mengatasi pandemi Covid-19, ilmuwan matematika mengembangkan berbagai model matematika untuk mempelajari karakteristik epidemi wabah, memprediksi penyebaran virus serta menawarkan berbagai langkah intervensi. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis sensitivitas dan kontrol optimal dari model SEIR penyebaran Covid-19 dengan menerapkan strategi kontrol berupa vaksinasi individu rentan dan pengobatan individu terinfeksi. Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter terkait penambahan jumlah individu rentan dan kematian individu rentan merupakan parameter paling berpengaruh terhadap nilai bilangan reproduksi dasar, jumlah individu terpapar dan terinfeksi. Penerapan strategi kontrol pada model berupa vaksinasi dan pengobatan penting untuk dilakukan karena efektif untuk menurunkan jumlah individu terinfeksi hingga 99%.

Keywords: Sensitivitas, Kontrol Optimal, Model SEIR, Covid-19

Abstract— Covid-19 (Coronavirus Disease) is an acute respiratory system disease caused by SARS-CoV-2 (Severe Acute Respiratory Syndrome 2). This outbreak was first discovered in Wuhan, Hubei province, China in December 2019 and has spread rapidly to various countries and was declared as a pandemic in March 2020. To overcome the Covid-19 pandemic, mathematicians develop mathematical model to study the spread of viruses and offer various intervention measures. This study aims to analyze the sensitivity and optimal control of the SEIR model for the Covid-19 dynamic in Indonesia by implementing control strategies. The control strategy used is vaccination of susceptible individuals and treatment of infected individuals. The sensitivity analysis shows that the rate of increase in the number of susceptible individuals and the mortality of susceptible individuals is the parameter that most influences the value of the basic reproduction number, the number of exposed and infected individuals. The control strategy used was effective in reducing the number of infected individuals to around 99%.

Keywords: Sensitivity, Optimal Control, SEIR Model, Covid-19

PENDAHULUAN

Pandemi Covid-19 (*Coronavirus Disease*) disebabkan oleh infeksi SARS-CoV-2 (*Severe Acute Respiratory Syndrome 2*) yang ditemukan pertama kali pada Desember 2019 di Kota Wuhan, Provinsi Hubei, Cina. Infeksi

virus ini menyebar dengan cepat di Cina dan negara-negara lainnya yang kemudian dinyatakan sebagai pandemi pada Maret 2020 oleh WHO (*World Health Organization*) [1]. Secara global, pada 4 Maret 2021 sebanyak 114.853.685 orang telah terkonfirmasi positif Covid-19 [2]. Di Indonesia, sejak 2 Maret 2020 hingga 4 Maret 2021, sebanyak 1.361.098

orang terkonfirmasi positif Covid-19 [3]. Upaya penanganan pandemi di Indonesia dilakukan pemerintah melalui berbagai langkah pencegahan dan pengobatan.

Peneliti dari berbagai bidang memberikan kontribusi untuk mengatasi pandemi Covid-19. Peneliti di bidang kesehatan berusaha mengidentifikasi sumber penyakit, cara mendeteksi penyakit serta upaya pengobatannya. Ilmuwan matematika merumuskan berbagai model matematika untuk mempelajari epidemi wabah, memprediksi penyebaran virus serta menawarkan berbagai langkah intervensi dalam pengendalian penyebaran penyakit. Model matematika penyebaran Covid-19 dikonstruksi oleh [4-6] dengan mempertimbangkan adanya kelompok yang diisolasi. Penelitian ketiganya menunjukkan bahwa isolasi merupakan salah satu faktor yang dapat menurunkan dan menghambat penyebaran Covid-19. Penelitian lain terkait pemodelan matematika penyebaran Covi-19 dapat dilihat pada [7-9].

Analisis pada model matematika penyebaran penyakit digunakan untuk mengetahui karakteristik penyebarannya. Pada model matematika, parameter-parameter yang digunakan dianalisis untuk mengetahui pengaruhnya terhadap penyebaran penyakit. Penyebaran penyakit dapat dikendalikan dengan menganalisis pengaruh adanya fungsi kontrol seperti pengobatan, karantina atau vaksinasi. Analisis sensitivitas dan kontrol optimal telah digunakan dalam menganalisis berbagai upaya pencegahan penyebaran penyakit. Penelitian kontrol optimal dapat dilihat pada [10-11] yang menunjukkan bahwa penerapan strategi kontrol dapat mengurangi jumlah individu terinfeksi. Penelitian lain terkait dengan analisis sensitivitas dan kontrol optimal penyebaran Covid-19 dapat dilihat pada [12-13]. Kedua penelitian tersebut menunjukkan bahwa parameter yang paling sensitif adalah parameter yang berkaitan dengan kontak individu rentan dan terinfeksi sehingga penerapan kontrol pada hal tersebut dapat menurunkan jumlah infeksi Covid-19.

Pada 2021, Sinaga, dkk. menganalisis model SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia dengan mempertimbangkan kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi dan kontak antara individu rentan dengan individu

exposed. Analisis simulasi numerik menunjukkan bahwa dinamika Covid-19 di Indonesia akan stabil untuk waktu yang lama sehingga upaya pencegahan seperti mengurangi kontak langsung, penerapan karantina pada individu terinfeksi dan vaksinasi dibutuhkan untuk meng-hentikan penyebaran virus [14].

Pada penelitian ini, akan dianalisis sensitivitas dan kontrol optimal pada model SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia. Kontrol optimal dianalisis dengan adanya penerapan strategi kontrol berupa vaksinasi individu rentan dan pengobatan individu terinfeksi Covid-19.

METODE PENELITIAN

Perumusan model SEIR penyebaran Covid-19 merupakan langkah awal penelitian ini. Langkah selanjutnya adalah penentuan titik kritis yang terdiri dari titik kritis bebas penyakit dan endemik penyakit. Analisis kestabilan dari masing-masing titik kritis dilakukan dengan menggunakan Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz. Selanjutnya, untuk analisis sensitivitas terlebih dahulu ditentukan bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*), kemudian ditentukan ekspresi sensitivitas dari masing-masing parameter terhadap bilangan reproduksi dasar, populasi terinfeksi, dan populasi *exposed*. Untuk kontrol optimal, dikonstruksi model SEIR penyebaran Covid-19 dengan menambahkan fungsi kontrol yang terdiri dari vaksinasi individu rentan dan pengobatan individu terinfeksi. Selanjutnya, berdasarkan model yang dikonstruksi ditentukan fungsi objektif dan fungsi kendala yang kemudian digunakan untuk merumuskan fungsi Hamiltonian. Penyelesaian kontrol optimal model SEIR penyebaran Covid-19 dilakukan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

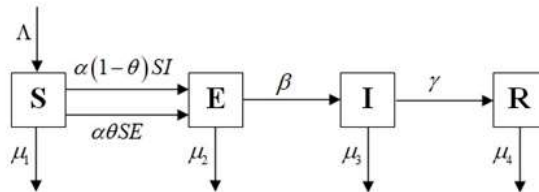
Proses awal simulasi numerik pada penelitian ini dilakukan dengan mengumpulkan data penyebaran Covid-19 (jumlah individu rentan, dipantau, terkonfirmasi, sembuh dan meninggal) yang bersumber dari Kementerian Kesehatan Republik Indonesia pada Agustus 2020-Agustus 2021. Selanjutnya data diproses untuk menentukan nilai parameter pada model. Simulasi numerik analisis sensitivitas dan kontrol optimal dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 dan software Matlab R2015a. Berdasarkan hasil analisis dan

simulasi numerik, selanjutnya dilakukan penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Modifikasi Model SEIR Penyebaran Covid-19

Model SEIR penyebaran Covid-19 terdiri dari empat subpopulasi, yaitu *Susceptible* (*S*),



Gambar. 1 Skema Modifikasi Model SEIR Penyebaran Covid-19

Berdasarkan skema di atas, dibentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \alpha S(\theta E + (1-\theta)I) - \mu_1 S \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha S(\theta E + (1-\theta)I) - (\mu_2 + \beta)E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta E - (\mu_3 + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu_4 R \end{aligned}$$

Variabel $S(t)$ menyatakan jumlah individu sehat yang rentan untuk terinfeksi, $E(t)$ menyatakan jumlah individu yang terinfeksi pada masa inkubasi, $I(t)$ menyatakan jumlah individu yang telah positif terinfeksi virus dan dapat menularkannya kepada individu lain, $R(t)$ menyatakan jumlah individu yang telah sembuh dan kebal terhadap virus. Adapun parameter yang digunakan pada model adalah sebagai berikut:

TABEL I
DEFINISI PARAMETER MODEL

Parameter	Deskripsi
Λ	Laju bertambahnya individu <i>susceptible</i>
α	Laju perpindahan individu dari kelas <i>susceptible</i> ke <i>exposed</i> karena interaksi langsung individu <i>susceptible</i> dengan <i>exposed</i> dan <i>infected</i>
β	Laju bertambahnya individu terinfeksi
γ	Laju sembuh
μ_1	Laju kematian alami pada <i>susceptible</i>
μ_2	Laju kematian alami pada <i>exposed</i>

Exposed (*E*), *Infected* (*I*) dan *Recovered* (*R*). Model penyebaran Covid-19 diadopsi dari [14] dengan mempertimbangkan adanya kontak antara individu *susceptible* dengan individu *infected* dan kontak antara individu *susceptible* dengan individu *exposed*. Skema model SEIR penyebaran Covid-19 adalah sebagai berikut:

μ_3	Laju kematian karena infeksi Covid-19
μ_4	Laju kematian alami pada <i>recovered</i>
θ	Proporsi individu rentan yang melakukan kontak langsung dengan kelompok yang sedang dipantau
$(1-\theta)$	Proporsi individu rentan yang melakukan kontak langsung dengan kelompok terkonfirmasi positif virus

B. Titik Kritis dan Analisis Kestabilan Model SEIR Penyebaran Covid-19

Titik (S, E, I, R) merupakan titik kritis dari sistem jika memenuhi $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ [15]. Model matematika penyebaran Covid-19 memiliki dua titik kritis, yaitu titik kritis bebas penyakit dan titik kritis endemik penyakit.

Diperoleh titik kritis bebas penyakit adalah $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu_1}, 0, 0, 0\right)$ dan titik kritis endemik penyakit adalah $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$, dimana

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)}{\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1-\theta))} \\ E^* &= \frac{\Lambda}{\mu_2 + \beta} - \frac{\mu_1(\mu_3 + \gamma)}{\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1-\theta))} \\ I^* &= \frac{\Lambda\beta}{(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)} - \frac{\beta\mu_1}{\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1-\theta))} \end{aligned}$$

$$R^* = \frac{\Lambda\beta\gamma}{\mu_4(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)} - \frac{\beta\gamma\mu_4}{\alpha\mu_4(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}$$

Berdasarkan analisis kestabilan menggunakan Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz, titik kritis pada kondisi bebas penyakit (E_0) akan bersifat stabil untuk $R_0 < 1$ dan titik kritis pada kondisi endemik penyakit (E_1) akan bersifat stabil untuk $R_0 > 1$.

C. Bilangan Reproduksi Dasar (Basic Reproduction Number)

Bilangan reproduksi dasar adalah jumlah infeksi baru pada individu rentan yang dihasilkan dari satu individu terinfeksi dalam populasi. Penentuan bilangan reproduksi dasar pada model SEIR penyebaran Covid-19 dilakukan melalui *next generation matrix* yang dikonstruksi dari kelompok individu terpapar (*exposed*) dan individu terinfeksi (*infected*).

Misalkan φ_i dinotasikan sebagai laju kenaikan infeksi pada kompartemen penyakit ke- i dan ψ_i sebagai laju pergerakan penyakit, kematian dan kesembuhan dari kompartemen ke- i . Dari persamaan $\frac{dE}{dt}$ dan $\frac{dI}{dt}$, diperoleh

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha S(\theta E + (1 - \theta)I) \\ \beta E \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu_2 + \beta)E \\ (\mu_3 + \gamma)I \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan linearisasi terhadap φ dan ψ sebagai berikut

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial E} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial E} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\theta S & \alpha(1 - \theta)S \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial E} & \frac{\partial \psi_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial E} & \frac{\partial \psi_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 + \beta & 0 \\ 0 & \mu_3 + \gamma \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh *next generation matrix*

$$K = FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\theta S}{\mu_2 + \beta} & \frac{\alpha(1 - \theta)S}{\mu_3 + \gamma} \\ \frac{\beta}{\mu_2 + \beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Dengan menyubstitusi nilai titik kritis bebas penyakit (E_0) pada *next generation matrix* dan menentukan nilai eigennya, maka diperoleh nilai *basic reproduction number* (R_0) adalah

$$R_0 = \frac{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}}{2\mu_1(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)} \quad (5)$$

dimana

$$D = \alpha\Lambda(\mu_3 + \gamma)(\alpha\theta^2\Lambda(\mu_3 + \gamma) + 4\beta\mu_1(1 - \theta)(\mu_2 + \beta))$$

D. Analisis Sensitivitas Model SEIR Penyebaran Covid-19

Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengetahui parameter yang berpengaruh terhadap *basic reproduction number* (R_0), titik kritis E^* dan I^* . Indeks sensitivitas akan menginformasikan pengaruh parameter-parameter terhadap epidemi.

Ekspresi sensitivitas R_0 , E^* dan I^* didefinisikan sebagai

$$C_p^v = \frac{\partial V}{\partial p} \times \frac{p}{V} \quad (6)$$

dimana V adalah variabel yang akan dianalisis (R_0, E^* dan I^*) dan p adalah parameter [16]. Berdasarkan persamaan (6) diperoleh ekspresi sensitivitas R_0 pada Tabel II.

TABEL II
EKSPRESI SENSITIVITAS R_0

Parameter	Ekspresi Sensitivitas
Λ	$\frac{\Lambda(\mu_3 + \gamma) \left[\alpha\theta + \frac{\alpha^2\theta^2\Lambda(\mu_3 + \gamma) + 2\alpha\beta\mu_1(1-\theta)(\mu_2 + \beta)}{\sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}}$
α	$\frac{\alpha(\mu_3 + \gamma) \left[\theta\Lambda + \frac{\alpha\theta^2\Lambda^2(\mu_3 + \gamma) + 2\Lambda\beta\mu_1(1-\theta)(\mu_2 + \beta)}{\sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}}$
β	$\frac{\left[\frac{2\alpha\beta\mu_1\Lambda(1-\theta)(\mu_2 + 2\beta)(\mu_3 + \gamma)}{\sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}} - \frac{\beta}{\mu_2 + \beta}$
γ	$\frac{\gamma \left[\alpha\theta\Lambda + \frac{(\alpha\theta\Lambda)^2(\mu_3 + \gamma) + 2\alpha\beta\mu_1\Lambda(1-\theta)}{\sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}} - \frac{\gamma}{\mu_3 + \gamma}$
μ_1	$\frac{\left[\frac{2\alpha\beta\mu_1\Lambda(1-\theta)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)}{\sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}} - 1$
μ_2	$\frac{\left[\frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2\Lambda(1-\theta)(\mu_3 + \gamma)}{\sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}} - \frac{\mu_2}{\mu_2 + \beta}$
μ_3	$\frac{\mu_3 \left[\alpha\theta\Lambda + \frac{(\alpha\theta\Lambda)^2(\mu_3 + \gamma) + D}{2\sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}} - \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma}$
θ	$\frac{\theta \left[\frac{\alpha\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \frac{\alpha\Lambda(\mu_3 + \gamma)(\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) - 2\beta\mu_1(\mu_2 + \beta))}{\sqrt{D}}}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}} \right]}{\alpha\theta\Lambda(\mu_3 + \gamma) + \sqrt{D}}$

Berdasarkan persamaan (6) diperoleh pula ekspresi sensitivitas terhadap E^* pada Tabel III dan ekspresi sensitivitas terhadap I^* pada Tabel IV.

TABEL III
EKSPRESI SENSITIVITAS E^*

Para-meter	Ekspresi Sensitivitas
Λ	$\frac{\Lambda\alpha(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))}{G}$
α	$\frac{\mu_1(\mu_2+\beta)(\mu_3+\gamma)}{G}$
β	$\frac{\mu_1\beta(\beta+\mu_2)^2(\mu_3+\gamma)(1-\theta)}{(\beta+\mu_2)(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))G} - \frac{\Lambda\alpha\beta(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))^2}{(\beta+\mu_2)(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))G}$
γ	$\frac{-\mu_1\beta\gamma(\mu_2+\beta)(1-\theta)}{(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))G}$
μ_1	$\frac{\mu_1(\mu_2+\beta)(\mu_3+\gamma)}{G}$
μ_2	$-\frac{\Lambda\alpha\mu_2(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))}{(\mu_2+\beta)G}$
μ_3	$\frac{-\beta\mu_1\mu_3(\mu_2+\beta)(1-\theta)}{(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))G}$
θ	$\frac{\mu_1\theta(\mu_2+\beta)(\mu_3+\gamma)(\mu_3+\gamma-\beta)}{(\theta(\mu_3+\gamma)+\beta(1-\theta))G}$

TABEL IV
EKSPRESI SENSITIVITAS I^*

Para-meter	Ekspresi Sensitivitas
Λ	$\frac{\Lambda\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}{G}$
α	$\frac{\mu_1(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)}{G}$
β	$\frac{\frac{\Lambda\mu_2\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))^2}{(\mu_2 + \beta)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G} - \frac{\mu_1\theta(\mu_2 + \beta)^2(\mu_3 + \gamma)^2}{(\mu_2 + \beta)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G}}{(\mu_2 + \beta)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G}$
γ	$\frac{\frac{\gamma\theta\mu_1(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)^2}{(\mu_3 + \gamma)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G} - \frac{\Lambda\alpha\gamma(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))^2}{(\mu_3 + \gamma)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G}}{(\mu_3 + \gamma)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G}$
μ_1	$-\frac{\mu_1(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)}{G}$
μ_2	$-\frac{\Lambda\alpha\mu_2(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}{(\mu_2 + \beta)G}$
μ_3	$\frac{\frac{\theta\mu_1\mu_3(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)^2}{(\mu_3 + \gamma)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G} - \frac{\Lambda\alpha\mu_3(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}{(\mu_3 + \gamma)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G}}{(\mu_3 + \gamma)(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G}$
θ	$\frac{\alpha\beta\theta\mu_1(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)(\mu_3 + \gamma - \beta)}{(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))G}$

dimana

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \Lambda - \alpha S(\theta E + (1 - \theta)I) - (\mu_1 + u_1)S$$

$$G = \Lambda\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta)) - \mu_1(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)$$

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = u_1 S + \alpha S(\theta E + (1 - \theta)I) - (\mu_2 + \beta)E$$

E. Model SEIR Penyebaran Covid-19 dengan Strategi Kontrol

Model SEIR penyebaran Covid-19 dengan strategi kontrol dirumuskan sebagai berikut:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \beta E - (\mu_3 + \gamma)I$$

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = (\gamma + u_2)I - \mu_4 R$$

dengan kondisi awal $S(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$ dan $R(0) \geq 0$. (7)

Fungsi kontrol $u_1(t)$ mewakili upaya kontrol melalui vaksinasi individu rentan dan $u_2(t)$ mewakili upaya kontrol melalui pengobatan individu terinfeksi. Fungsi kontrol

$u_1(t)$ dan $u_2(t)$ diasumsikan terbatas dan merupakan fungsi terintegrasi Lebesgue pada interval waktu $[t_0, t_f]$ yang didefinisikan dalam himpunan berikut.

$$U = \left\{ u_i(t) \mid 0 \leq u_i(t) \leq u_{i\max}, i = 1 \text{ dan } 2, \forall t \in [t_0, t_f] \right\}$$

Kontrol optimal bertujuan untuk meminimumkan jumlah individu terinfeksi dan meminimumkan upaya untuk strategi kontrol yang diterapkan, sehingga fungsi objektif dirumuskan sebagai

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T (A_1 I + A_2 u_1^2 + A_3 u_2^2) dt \quad (\xi)$$

dimana A_1 , A_2 dan A_3 merupakan parameter bobot sebagai faktor penyeimbang terkait dengan biaya. Fungsi objektif (8) bergantung pada sistem persamaan diferensial (7).

Dengan demikian sistem kontrol optimal model SEIR penyebaran Covid-19 dirumuskan sebagai upaya menemukan kontrol $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ pada interval waktu $t_0 \leq t \leq t_f$, dengan $t_0 = 0$ adalah waktu awal dan $t_f = T$ adalah waktu akhir, sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min J(u_1, u_2) \quad (\zeta)$$

Berdasarkan masalah kontrol optimal yang dirumuskan di atas, dibentuk fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$H = A_1 I + A_2 u_1^2 + A_3 u_2^2 + \lambda_s (\Lambda - \alpha S (\theta E + (1-\theta)I) - (\mu_2 + u_1)S) + \lambda_E (u_1 S + \alpha S (\theta E + (1-\theta)I) - (\mu_2 + \beta)E) + \lambda_I (\beta E - (\mu_3 + \gamma + u_2)I) + \lambda_R ((\gamma + u_2)I - \mu_4 R)$$

dimana λ_s , λ_E , λ_I dan λ_R merupakan pengali Lagrange.

F. Kontrol Optimal Menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin

Kondisi perlu untuk kontrol optimal dipenuhi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin untuk model penyebaran Covid-19 (7). Menggunakan fungsi Hamiltonian (10) dan teorema Prinsip Maksimum Pontryagin [17] diperoleh sebagai berikut:

Misalkan

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = (\dot{S}^*(t), \dot{E}^*(t), \dot{I}^*(t), \dot{R}^*(t))$$

$$\mathbf{u}^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t)) \quad \text{dan}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = (\lambda_s^*(t), \lambda_E^*(t), \lambda_I^*(t), \lambda_R^*(t))$$

Agar $u^*(t)$ optimal, diperlukan adanya fungsi vector

tak nol $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ sedemikian sehingga diperoleh persamaan *state*

$$\dot{S}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_s} = \Lambda - \alpha S (\theta E + (1-\theta)I) - (\mu_1 + u_1)S$$

$$\dot{E}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_E} = u_1 S + \alpha S (\theta E + (1-\theta)I) - (\mu_2 + \beta)E$$

$$\dot{I}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_I} = \beta E - (\mu_3 + \gamma)I$$

$$\dot{R}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_R} = (\gamma + u_2)I - \mu_4 R$$

(11)

dan persamaan *costate*

$$\dot{\lambda}_s^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial S} = \alpha (\theta E + (1-\theta)I) (\lambda_s - \lambda_E) + \mu_1 \lambda_s + u_1 (\lambda_s - \lambda_E)$$

$$\dot{\lambda}_E^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial E} = \alpha \theta S (\lambda_s - \lambda_E) + \mu_2 \lambda_E + \beta (\lambda_E - \lambda_I)$$

$$\dot{\lambda}_I^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial I} = -A_1 + \alpha (1-\theta) S (\lambda_s - \lambda_E) + \mu_3 \lambda_I + (\gamma + u_2) (\lambda_I - \lambda_R)$$

$$\dot{\lambda}_R^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial R} = \mu_4 \lambda_R$$

(12)

Karena waktu akhir $t_f = T$ ditentukan dan kondisi akhir $S(T)$, $E(T)$, $I(T)$ dan $R(T)$ tidak ditentukan, maka dipenuhi kondisi transversalitas sedemikian sehingga $\lambda_s(T) = \lambda_E(T) = \lambda_I(T) = \lambda_R(T) = 0$ [17].

(10) Untuk memperoleh nilai $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ yang optimal, syarat perlu untuk kondisi optimal harus dipenuhi, yaitu $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, sedemikian sehingga diperoleh

$$u_1^* = \frac{(\lambda_E - \lambda_s)S}{2A_2} \quad \text{dan} \quad u_2^* = \frac{(\lambda_I - \lambda_R)I}{2A_3}$$

Karena fungsi kontrol terbatas, yaitu $0 \leq u_1^*(t) \leq u_{1\max}$ dan $0 \leq u_2^*(t) \leq u_{2\max}$, maka diperoleh

$$u_1^*(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{(\lambda_E - \lambda_S)S}{2A_2}, u_{1\max} \right\} \right\}$$

$$u_2^*(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{(\lambda_I - \lambda_R)I}{2A_3}, u_{2\max} \right\} \right\}$$

software Matlab R2015a. Simulasi numerik bertujuan untuk memperoleh gambaran geometris terkait dengan hasil analisis model. Model SEIR penyebaran Covid-19 disimulasikan menggunakan data penyebaran Covid-19 di Indonesia pada Agustus 2020-Agustus 2021. oleh Kementerian Kesehatan Republik

G. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 dan Indonesia.

TABEL V
DATA COVID-19 DI INDONESIA

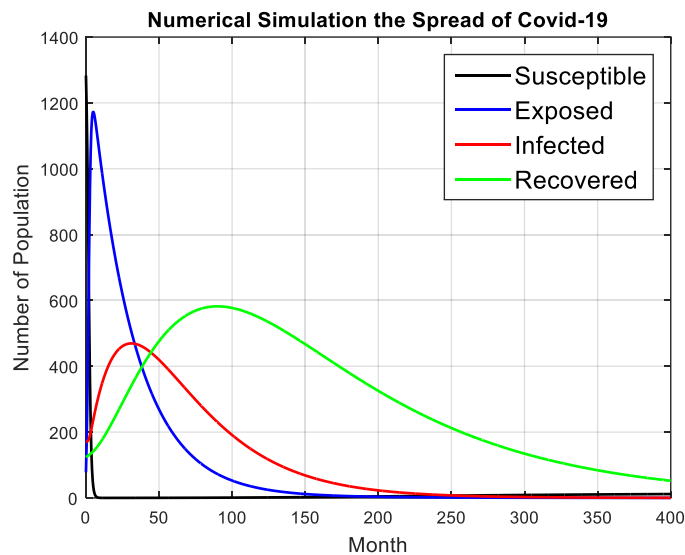
Year	Bulan	S	E	I	R	Kemati-an
2020	Agustus	1.282.618	77.951	172.053	124.185	7.343
	September	1.962.754	132.496	282.724	210.437	10.601
	Oktober	2.853.984	68.292	406.945	334.295	13.782
	November	3.797.881	70.792	534.266	445.793	16.815
	Desember	4.875.480	67.615	735.124	603.741	21.944
2021	Januari	6.125.290	74.985	1.066.313	862.502	29.728
	Februari	7.173.023	78.746	1.329.074	1.136.054	35.981
	Maret	8.445.150	60.671	1.505.775	1.342.695	40.754
	April	9.769.757	66.295	1.662.868	1.517.432	45.334
	Mei	11.197.817	105.518	1.816.041	1.663.998	50.404
	Juni	13.225.859	132.723	2.156.465	1.869.606	58.024
	Juli	17.712.645	278.546	3.372.374	2.703.720	93.311
	Agustus	21.487.697	248.333	3.669.966	3.760.497	133.023

Berdasarkan Tabel V, nilai parameter ditentukan sebagai berikut:

TABEL VI
NILAI PARAMETER

Parameter	Nilai	Referensi
Λ	0.1374	Estimasi
α	0.0012	Estimasi
β	0.0239	Estimasi
γ	0.0248	Estimasi
μ_1	0.0128	Asumsi
μ_2	0.0128	Asumsi
μ_3	0.0009	Estimasi
μ_4	0.0128	Asumsi
θ	0.75	Asumsi

1) *Simulasi Numerik Analisis Kestabilan* nilai awal $S_0 = 1.283$, $E_0 = 78$, $I_0 = 172$ dan $R_0 = 124$ pada periode waktu simulasi 400 bulan. Simulasi numerik analisis kestabilan dilakukan dengan menggunakan bulan.



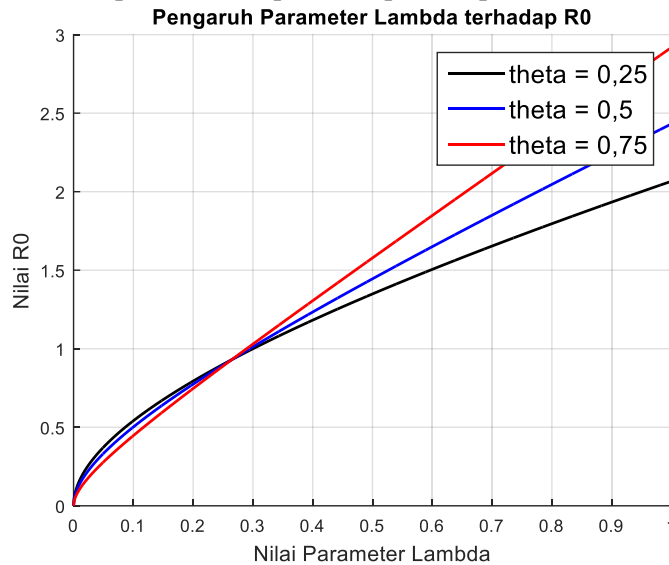
Gambar. 2 Analisis Kestabilan Model SEIR Penyebaran Covid-19

Pada Gambar 2. ditunjukkan grafik perubahan jumlah individu dari subpopulasi *susceptible*, *exposed*, *infected* dan *recovered* selama 400 bulan. Grafik dinamika Covid-19 pada Gambar 2. Menunjukkan bahwa penyebaran Covid-19 di Indonesia tanpa penerapan strategi

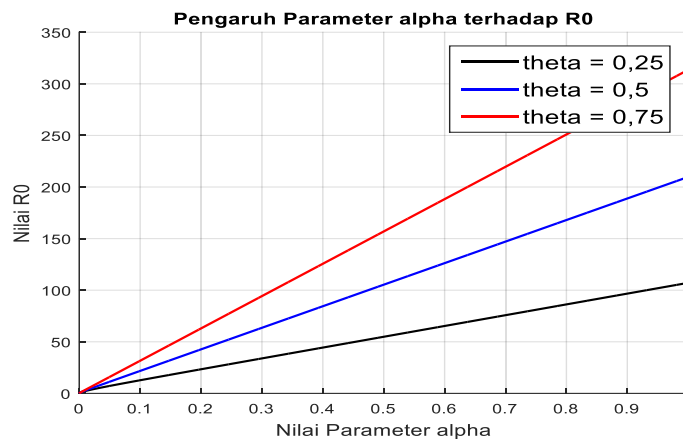
kontrol akan mencapai titik stabil setelah bulan ke-400.

2) *Simulasi Numerik Analisis Sensitivitas*: Simulasi numerik analisis sensitivitas dilakukan berdasarkan nilai indeks sensitivitas yang paling berpengaruh terhadap R_0 , E^* dan I^* . Nilai

indeks sensitivitas diperoleh dengan persamaan indeks sensitivitas yang menyubstitusi nilai parameter pada diperoleh pada Tabel II-Tabel IV.



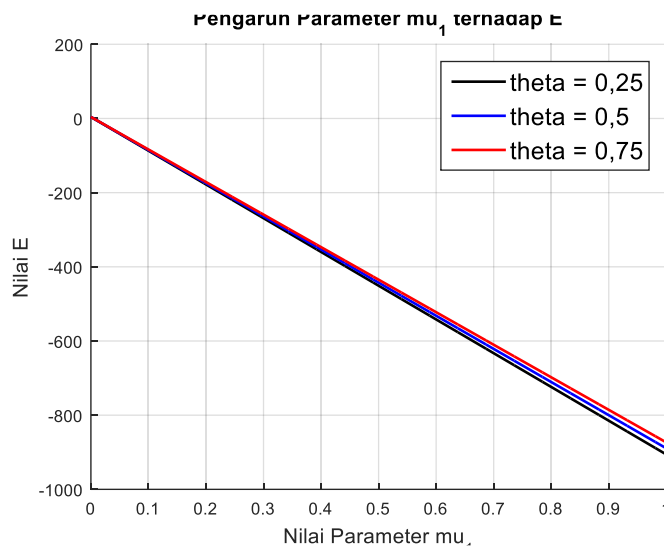
Gambar. 3 Pengaruh Parameter Λ terhadap R_0



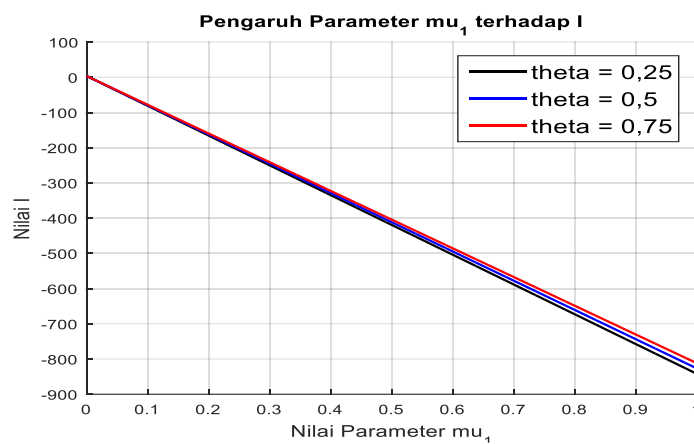
Gambar. 4 Pengaruh Parameter α terhadap R_0

Grafik pada Gambar. 3 menunjukkan pengaruh parameter Λ terhadap nilai R_0 dan Gbr. 4 menunjukkan pengaruh parameter α terhadap nilai R_0 . Parameter Λ dan α memiliki relasi positif terhadap nilai R_0 , yang berarti bahwa semakin besar nilai parameter Λ dan α mengakibatkan nilai R_0 semakin besar. Berdasarkan nilai

indeks sensitivitas, setiap kenaikan satu satuan nilai parameter Λ mengakibatkan nilai R_0 bertambah sebesar 0,738 dan setiap kenaikan satu satuan nilai parameter α mengakibatkan nilai R_0 bertambah sebesar 0,738.



Gambar. 5 Pengaruh Parameter μ_1 terhadap E^*

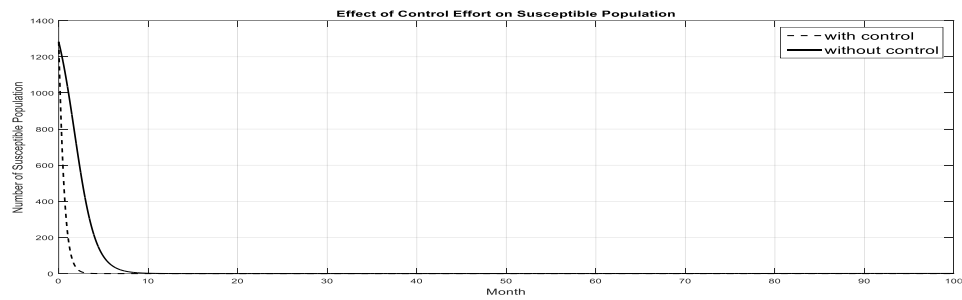


Gambar. 6 Pengaruh Parameter μ_1 terhadap I^*

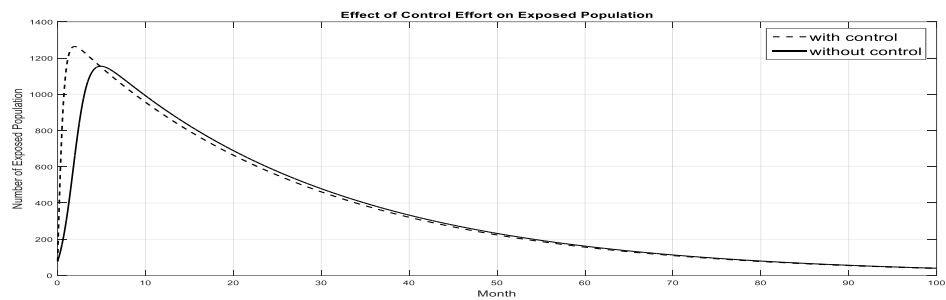
Grafik pada Gambar. 5 menunjukkan pengaruh parameter μ_1 terhadap E^* dan Gbr. 6 menunjukkan pengaruh parameter μ_1 terhadap I^* . Parameter μ_1 memiliki relasi negatif terhadap nilai E^* dan I^* , yang berarti bahwa semakin besar nilai parameter μ_1 mengakibatkan nilai E^* dan I^* semakin kecil. Berdasarkan nilai indeks sensitivitas, setiap kenaikan satu satuan nilai parameter μ_1 mengakibatkan nilai E^* dan I^* berkurang sebesar 1,9084.

3) *Simulasi Numerik Kontrol Optimal:* Simulasi numerik kontrol optimal dilakukan untuk mengetahui pengaruh

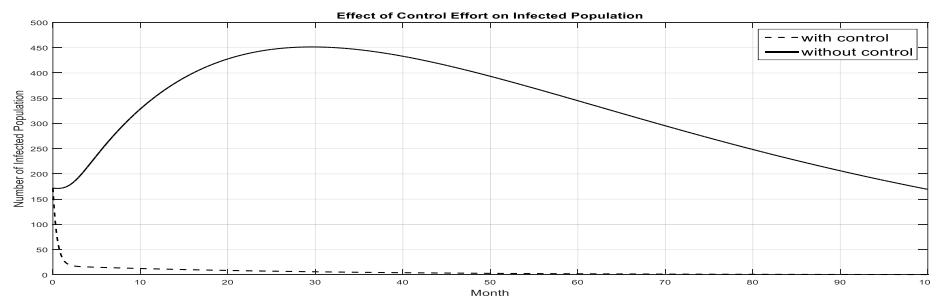
vaksinasi individu rentan dan pengobatan individu terinfeksi terhadap perubahan jumlah individu pada subpopulasi *susceptible*, *exposed*, *infected* dan *recovered*. Simulasi numerik kontrol optimal dilakukan dengan menggunakan nilai awal $S_0 = 1.283$, $E_0 = 78$, $I_0 = 172$ dan $R_0 = 124$ pada periode waktu kontrol selama 100 bulan. Nilai parameter biaya pada fungsi objektif adalah $A_1 = 1$, $A_2 = 100$ dan $A_3 = 200$ dengan batasan fungsi kontrol $0 \leq u_1^* \leq 0,7$ dan $0 \leq u_2^* \leq 1$.



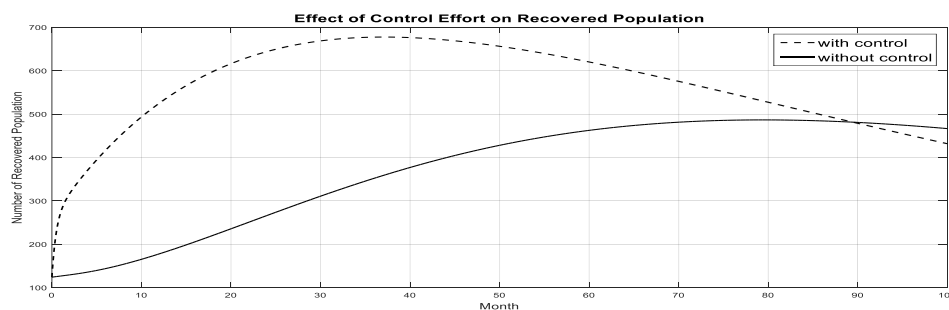
Gambar. 7 Pengaruh Pemberian Kontrol pada Subpopulasi *S*



Gambar. 8 Pengaruh Pemberian Kontrol pada Subpopulasi *E*



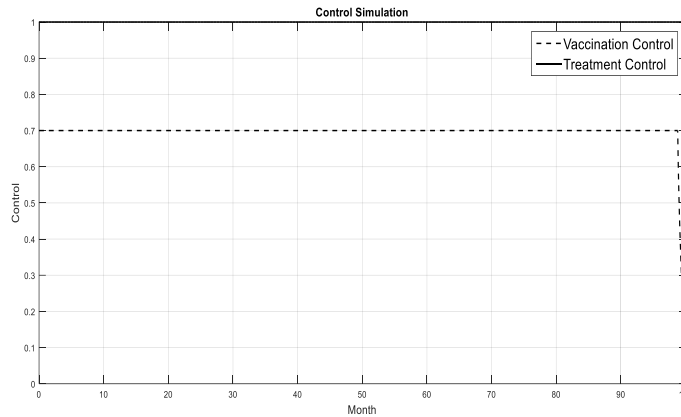
Gambar. 9 Pengaruh Pemberian Kontrol pada Subpopulasi *I*



Gambar. 10 Pengaruh Pemberian Kontrol pada Subpopulasi *R*

Grafik pada Gambar. 7-Gambar. 10 masing-masing menunjukkan perbandingan antara sistem dengan kontrol dan tanpa kontrol pada subpopulasi *susceptible*, *exposed*, *infected* dan *recovered*. Pada Gambar. 7 dan Gambar. 9 dapat dilihat bahwa untuk sistem dengan penerapan kontrol, jumlah individu *susceptible* dan *infected* mengalami penurunan sejak awal hingga akhir periode simulasi. Pada Gambar. 8 jumlah individu *exposed* awalnya mengalami peningkatan dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol, namun pada akhir periode simulasi

jumlahnya semakin menurun. Sedangkan mengalami peningkatan hingga akhir pada Gambar. 9 jumlah individu *recovered* periode simulasi



Gambar. 11 Simulasi Kontrol pada Penyebaran Covid-19

Berdasarkan Gambar. 11, penggunaan kontrol $u_1(t)$ dapat dilakukan secara maksimal hingga akhir bulan ke-98 dan penggunaan kontrol $u_2(t)$ dapat dilakukan hingga akhir bulan ke-99, untuk waktu selanjutnya sistem tidak menerapkan pengontrolan maksimal.

Penerapan strategi kontrol vaksinasi individu rentan mampu mereduksi jumlah Total populasi pada keadaan awal adalah 1.657.000 individu, pada system dengan kontrol jumlah nya tereduksi sebesar 62% menjadi 633.242 individu. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa penggunaan strategi kontrol $u_1(t)$ dan

individu *exposed* sebesar 3%, sehingga dapat diinterpretasikan penghematan biaya vaksinasi dapat dilakukan hingga 3%. Penerapan strategi kontrol pengobatan individu terinfeksi dapat meningkatkan jumlah individu *recovered* sebesar 1%, sehingga dapat diinterpretasikan bahwa biaya pengobatan mengalami peningkatan sebanyak 1%.

$u_2(t)$ efektif untuk menurunkan jumlah individu *exposed* sebesar 3%, sehingga dapat diinterpretasikan penghematan biaya individu terinfeksi Covid-19, namun tidak dapat mempertahankan jumlah populasinya.

KESIMPULAN

Model SEIR penyebaran Covid-19 memiliki dua titik kritis, yaitu titik kritis bebas penyakit dan endemik penyakit. Kedua titik kritis dari model akan bersifat stabil jika memenuhi syarat parameter tertentu. Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter terkait penambahan individu *susceptible* dan kematian alami *susceptible* merupakan parameter yang paling berpengaruh pada *basic reproduction number*, jumlah individu *exposed* dan *infected*. Dinamika Covid-19 di Indonesia tanpa adanya penerapan strategi kontrol akan mencapai titik stabil setelah bulan ke-400. Sistem kontrol pada penyebaran Covid-19 menggunakan strategi vaksinasi individu rentan dan pengobatan individu terinfeksi dibutuhkan untuk menurunkan serta menyelesaikan masalah dinamika Covid-19 di Indonesia. Strategi kontrol yang diterapkan efektif untuk menurunkan jumlah individu terinfeksi meskipun tidak dapat mempertahankan jumlah populasinya.

Penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menggunakan berbagai strategi kontrol lainnya yang dapat diterapkan untuk mencegah penyebaran Covid-19. Penelitian ini juga dapat dikembangkan dengan menganalisis stabilitas, sensitivitas dan kontrol optimal pada model dengan adanya waktu tunda penyebaran seperti penerapan karantina dan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H. Ouassou, L. Kharchoufa, M. Bouhrim, N. E. Daoudi, H. Imtara, N. Bencheikh, A. Elbouzidi dan M. Bnouham, "The pathogenesis of coronavirus disease 2019 (Covid-19): Evaluation and prevention," *Journal of Immunology Research*, vol. 2020, pp. 1-7, 2020.
- [2] World Health Organization. (2021) WHO Coronavirus Disease (Covid-19) Dashboard [Online]. Available: <https://covid19.who.int>
- [3] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. (2021) Situasi Covid-19 di Indonesia [Online]. Available: <https://covid19.go.id>.
- [4] A. Zeb, E. Alzahrani, V. S. Erturk dan G. Zaman, "Mathematical model for coronavirus disease 2019 (Covid-19) containing isolation class," *BioMed Research International*, vol. 2020, pp. 1-7, 2020.
- [5] J. Jiao, Z. Liu dan S. Chai, "Dynamics of an SEIR model with infectivity in incubation period and homestead-isolation on the susceptible," *Applied Mathematics Letters*, vol. 107, pp. 1-7, 2020.
- [6] S. Annas, M. I. Pratama, M. Rifandi, W. Sanusi dan S. Side, "Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic Covid-19 spread in Indonesia," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 139, pp. 1-17, 2020.
- [7] S. Mandal, T. Bhatnagar, N. Arinaminpathy, A. Agarwal, A. Chowdhury, M. Murhekar, R. R. Gangakhedkar dan S. Sarkar, "Prudent public health intervention strategies to control the coronavirus disease-2019 transmission in India: a mathematical model-based approach," *India J Med Res*, vol. 151, pp. 190-199, 2020.
- [8] Rustam dan L. Handayani, "The outbreaks modelling of coronavirus (Covid-19) using the modified SEIR model in Indonesia," *SPEKTRA: Jurnal Fisika dan Aplikasinya*, vol. 5, pp. 61-68, 2020.
- [9] F. Ndairou, I. Area, J. J. Nieto dan F. M. Torres, "Mathematical modelling

- of Covid-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 135, pp. 1-11, 2020.
- [10] K. Lee, J. Kim dan H. Kwon, “Optimal control of an influenza model with seasonal forcing and age-dependent transmission rate,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 317, pp. 310-320, 2013.
- [11] Subchan, I. Fitria dan A. M. Syafi’i, “An epidemic cholera model with control treatment and intervention,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1218, pp. 1-9, 2019.
- [12] T. Hussain, M. Ozair, F. Ali, S. Rehman, T. A. Assiri dan E. E. Mahmoud, “Sensitivity analysis and optimal control of Covid-19 dynamics based on SEIQR model,” *Results in Physics*, vol. 22, pp. 1-11, 2021.
- [13] C. E. Madubueze, S. Dachollom dan I. O. Onwubuya, “Controlling the spread of Covid-19: Optimal control analysis,” *Computation and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2020, pp. 1-4, 2020.
- [14] L. P. Sinaga, H. Nasution dan D. Kartika, “Stability analysis of the corona virus (Covid-19) dynamics SEIR model in Indonesia,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 189, pp: 1-9, 2021.
- [15] P. Driessche and J. Watmough, “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission,” *Mathematical Biosciences*, vol. 180, pp: 29-48, 2002.
- [16] P. N. V. Tu, *Introductory Optimization Dynamics: Optimum Control with Economics and Management Applications*. New York: Springer-Verlag, 1984.