

## BIFURKASI HOPF PADA MODEL DINAMIKA SEIR PENYEBARAN COVID-19 DI INDONESIA

Chi-chi Monalisa Hutabarat<sup>1</sup>, Lasker P. Sinaga<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika, Universitas Negeri Medan, Jalan Willem Iskandar Pasar V,  
Medan 20221, Indonesia

<sup>1</sup>monalisachichi@gmail.com, <sup>2</sup>lazer\_integral@yahoo.com

**Abstrak**— *Corona Virus Disease 2019 (Covid-19)* adalah penyakit yang menyerang sistem pernafasan akibat infeksi SARS-CoV-2 (*Severe Acute Respiratory Syndrome*). Pada Desember 2019, virus corona pertama kali muncul di Wuhan, provinsi Hubei, China yang berubah menjadi wabah pandemi yang menyebar ke seluruh dunia, termasuk Indonesia. Untuk mengatasi pandemi Covid-19, peneliti dari berbagai bidang memberikan kontribusinya. Ilmuwan matematika mempelajari karakteristik epidemi wabah, memprediksi penyebaran virus serta menawarkan berbagai langkah intervensi melalui pengembangan model matematika sehingga dapat mengendalikan penyebaran penyakit. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis stabilitas dan bifurkasi hopf dengan melihat perubahan struktur orbit pada sistem seiring dengan perubahan nilai parameter. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa dinamika Covid-19 di Indonesia akan mencapai titik stabil untuk waktu yang lama, yaitu setelah mencapai 500 bulan. Berdasarkan analisis sensitivitas pada referensi sebelumnya, parameter  $\alpha$  dan  $\Lambda$  disebut parameter bifurkasi. Hasil analisis menunjukkan bifurkasi Hopf terjadi pada simulasi *exposed* terhadap *infected* yang ditandai dengan munculnya limit cycle pada orbit.

**Keywords**—Analisis kestabilan, bifurkasi, bifurkasi hopf, model SEIR, Covid-19

**Abstract**— *Coronavirus Disease 2019 (Covid-19)* is an acute respiratory system disease caused by SARS-CoV-2 (*Severe Acute Respiratoryiscovered Syndrome 2*). In December 2019, *coronavirus* was first discovered in Wuhan, Hubei province, China which turned into a pandemic outbreak and has been spreading in whole the world, including Indonesia. Research from various disciplines is carried out to overcome the Covid-19 pandemic. Mathematicians develop mathematical models to study the characteristics of epidemic, predict the spread of viruses and offer various intervention measures. This study aims to analyze the stability and hopf bifurcation of the SEIR model for the Covid-19 dynamic in Indonesia by looking at changes in the orbit structure of the system along with changes in parameter values. Stability analysis shows that the dynamics of Covid-19 in Indonesia will stable to occur for a long term, after reaching 500 months. Based on the sensitivity analysis in the previous reference, parameters  $\alpha$  dan  $\Lambda$  are bifurcation parameters. The results of the analysis show that the Hopf bifurcation occurs in the *exposed* to *infected* simulation which is indicated by the appearance of a limit cycle in the orbit.

**Keywords**—Stability analysis, bifurcation, hopf bifurcation, SEIR model, Covid-19

## PENDAHULUAN

*Corona Virus Disease 2019* (Covid-19) adalah virus baru yang menyebabkan penyakit menular, virus tersebut dikenal dengan sebutan *Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-COV-2) yang pertama kali muncul di kota Wuhan, Provinsi Hubei, China, dan berubah menjadi wabah pandemi yang menyebar ke seluruh dunia, termasuk Indonesia [1]. Menurut *World Health Organization* [2], secara global pada tanggal 10 Maret 2021, ada 117.332.262 kasus Covid-19 yang dikonfirmasi, termasuk 2.605.356 kematian. Dan di Indonesia, pada tanggal 10 Maret 2021 sebanyak 37.932 orang dinyatakan meninggal dunia, 1.398.578 terkonfirmasi kasus Covid-19 dan 1.216.433 dinyatakan sembuh [3].

Pada pasien dengan penyakit *Coronavirus 2019* (Covid-19), gejala klinis yang paling umum adalah demam dan batuk, sesak napas, dan selain kesulitan bernapas serta memiliki gejala nonspesifik lainnya, termasuk dispnea, sakit kepala, nyeri otot dan kelelahan. Ada beberapa pasien juga melaporkan gejala pencernaan seperti diare dan muntah. Covid-19 mirip dengan SARS dan MERS dalam beberapa manifestasi klinis [4].

Penggunaan model matematika dalam memahami penyakit menular sudah dilakukan selama bertahun-tahun. Dan peneliti dari berbagai bidang telah memberikan kontribusi dalam mengatasi pandemi Covid-19.

Analisis model penyebaran penyakit Covid-19 dikonstruksi oleh [5] dengan model matematika penyebaran Covid-19 dengan infektivitas dalam masa inkubasi dan isolasi tanpa adanya vaksinasi atau obat antivirus dan dengan mempertimbangkan adanya kelompok yang diisolasi atau karantina dan model lain juga dikonstruksikan oleh [6] yang berjudul "The Outbreak's Modeling Of

Coronavirus (Covid-19) Using The Modified Seir Model In Indonesia" dengan adanya pemberlakuan karantina dengan model SEIR yang dimodifikasi dan beberapa asumsi populasi konstan dan homogen untuk meneliti dan memperidiksi jumlah penderita Covid-19 dan lamanya pandemi Covid-19 di Indonesia.

Dalam pemodelan penyebaran penyakit terdapat perubahan parameter yang mempengaruhi kestabilan sistem, maka diperlukannya analisis bifurkasi. Analisis bifurkasi sangat diperlukan untuk mengetahui perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik tetap akibat adanya perubahan parameter dan analisis bifurkasi juga bertujuan untuk meminimalkan terjadinya perubahan sebuah kestabilan yang dipengaruhi oleh beberapa faktor yang telah dianalisis sebelumnya dan sistem yang telah dibentuk dapat dapat bekerja secara maksimal [7]. Ada beberapa macam jenis bifurkasi, diantaranya bifurkasi saddle-node, bifurkasi pitchfork, bifurkasi transkritikal, bifurkasi superkritikal, dan bifurkasi hopf. Penelitian mengenai bifurkasi hopf dapat dilihat pada [8] yang berjudul "Stability and Hopf bifurcation analysis of an SVEIR epidemic model with vaccination and multiple time delays" menyatakan arah dan stabilitas dari bifurkasi Hopf yang diinduksi waktu tunda menggunakan teori bentuk normal dan teorema *centre manifold*.

Pada tahun 2021, Sinaga, dkk. menganalisis model SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia dengan mempertimbangkan kontak antarindividu rentan (*susceptible*) dengan individu terinfeksi dan kontak antara individu rentan (*susceptible*) dengan individu *exposed*. Analisis simulasi pada jurnal ini menunjukkan dinamika Covid-19 akan stabil dalam waktu yang lama [9].

Pada penelitian ini, akan dianalisis stabilitas dan bifurkasi hopf pada model SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan di *Digital Library* Universitas Negeri Medan. Waktu yang dibutuhkan untuk penelitian ini kurang lebih selama dua bulan. Jenis penelitian ini adalah penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (*library research*). Penelitian kepustakaan atau studi

Literatur adalah penelusuran dengan penelaahan terhadap beberapa literatur yang mempunyai relevansi dengan topik pembahasan. Pengumpulan informasi dalam penelitian ini dilakukan melalui buku referensi, jurnal, maupun dokumen-dokumen lain yang berkaitan dengan topik pembahasan. Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang bersumber dari publikasi “Situasi Terkini Perkembangan Covid-19 di Indonesia” oleh Kementerian Kesehatan Republik Indonesia.

Langkah awal yang dilakukan dalam penelitian ini adalah perumusan model dinamika SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia dengan mengadopsi dari penelitian terdahulu. Langkah selanjutnya adalah penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit. Selanjutnya, ditentukan bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*), lalu menentukan analisis kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan menggunakan Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz. Setelah itu, ditentukan nilai eigen dari masing-

masing titik kesetimbangan dan jika ditemui sepasang nilai eigen yang memiliki nilai imajiner selanjutnya ditentukan syarat nilai eigen sama dengan nol dibagian realnya. Kemudian analisis bifurkasi hopf dengan syarat-syarat terjadinya bifurkasi hopf.

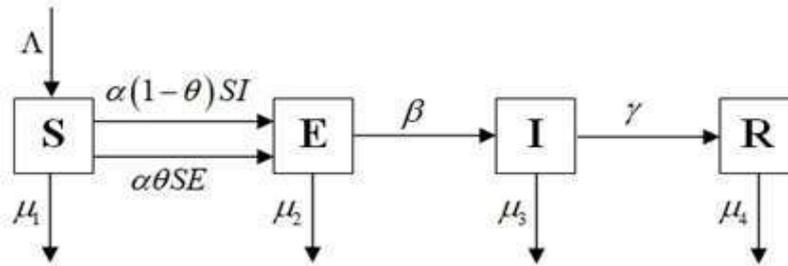
Proses awal simulasi numerik pada penelitian ini dilakukan dengan mengumpulkan data penyebaran Covid-19 (jumlah individu rentan, dipantau, terkonfirmasi, sembuh dan meninggal) yang bersumber dari Kementerian Kesehatan Republik Indonesia pada Agustus 2020-Agustus 2021. Selanjutnya data diproses untuk menentukan nilai parameter pada model Simulasi numerik analisis stabilitas dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 dan software Matlab R2017b dan simulasi numerik pada bifurkasi hopf dilakukan dengan simulasi *MATCONT* pada software Matlab R2017b. Berdasarkan hasil analisis dan simulasi numerik, selanjutnya dilakukan penarikan kesimpulan.

## PEMBAHASAN DAN HASIL

### A. Model SEIR Penyebaran Covid-19 di Indonesia

Model SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia diadopsi dari [9] terdiri dari empat subpopulasi, yaitu *S* (*Susceptible*), *E* (*Exposed*), *I* (*Infected*) dan *R* (*Recovered*) dengan mempertimbangkan adanya kontak antara individu *susceptible* dengan individu *exposed* dan kontak antara individu *susceptible* dengan individu *infected*.

Skema model SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Skema Modifikasi SEIR Penyebaran Covid-19

Berdasarkan gambar diatas, dibentuk persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \alpha S (\theta E + (1-\theta) I) - \mu_1 S \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha S (\theta E + (1-\theta) I) - (\mu_2 + \beta) E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta E - (\mu_3 + \gamma) I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu_4 R \end{aligned}$$

TABEL 1. KETERANGAN PARAMETER

Parameter	Keterangan
$\Lambda$	Laju bertambahnya individu <i>susceptible</i>
$\alpha$	Laju perpindahan individu dari kelas <i>susceptible</i> ke <i>exposed</i> karena interaksi langsung individu <i>susceptible</i> dengan <i>exposed</i> dan <i>infected</i>
$\beta$	Laju bertambahnya individu terinfeksi
$\gamma$	Laju sembuh
$\mu_1$	Laju kematian alami pada <i>susceptible</i>
$\mu_2$	Laju kematian alami pada <i>exposed</i>
$\mu_3$	Laju kematian karena infeksi Covid-19
$\mu_4$	Laju kematian alami pada <i>recovered</i>
$\theta$	Proporsi jumlah individu <i>suspect</i> yang melakukan isolasi mandiri

Variabel  $s(t)$  menyatakan jumlah individu sehat yang rentan untuk terinfeksi,  $E(t)$  menyatakan jumlah individu yang terinfeksi pada masa inkubasi,  $I(t)$  menyatakan jumlah individu yang terinfeksi,  $R(t)$  menyatakan jumlah individu yang telah sembuh dan kebal terhadap virus.

B. *Bilangan Reproduksi Dasar (R)*

menyatakan jumlah individu yang telah positif terinfeksi virus dan dapat

0

Bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) atau  $R_0$  adalah

jumlah infeksi baru pada individu rentan yang dihasilkan dari satu individu terinfeksi dalam populasi. model SEIR

penyebaran Covid-19 dilakukan melalui *next generation matrix* yang dikonstruksi dari kelompok individu terpapar (*exposed*) dan kelompok individu terinfeksi (*infected*) sebagai berikut:

$$\frac{dE}{dt} = \alpha S (\theta E + (1-\theta) I) - (\mu + \beta) E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - (\mu + \gamma) I$$

Misalkan  $\varphi_i$  dinotasikan sebagai

laju kenaikan infeksi pada kompartemen penyakit ke- $i$  dan  $\psi_i$  sebagai laju

pergerakan penyakit, kematian dan kesembuhan dari kompartemen ke- $i$ . Berdasarkan persamaan diatas, diperoleh vektor  $\varphi$  dan  $\psi$  sebagai berikut:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha S (\theta E + (1-\theta) I) \\ \beta E \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + \beta) E \\ (\mu + \gamma) I \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan linearisasi terhadap vektor  $\varphi$  dan  $\psi$  sebagai berikut:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial E} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial E} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \theta S & \alpha (1-\theta) S \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial E} & \frac{\partial \psi_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial E} & \frac{\partial \psi_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \beta & 0 \\ 0 & \mu + \gamma \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh *next generation matrix* sebagai berikut:

$$K = FV^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha \theta S & \alpha (1-\theta) S \\ \frac{\beta}{\mu + \beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Substitusi nilai titik kritis bebas penyakit ( $E_0$ ) pada *next generation matrix* sehingga diperoleh nilai *basic reproduction number* ( $R_0$ ) adalah  $R_0 = \max [\lambda_1, \lambda_2]$ , yaitu

$$R_0 = \frac{\alpha \theta \Lambda (\mu_3 + \gamma) + \sqrt{\alpha \Lambda (\mu_3 + \gamma) (\alpha \theta^2 \Lambda (\mu_3 + \gamma) + 4 \beta \mu_1 (1-\theta) (\mu_2 + \beta))}}{2 \mu_1 (\mu_2 + \beta) (\mu_3 + \gamma)}$$

### C. Titik Kesetimbangan Model SEIR Covid-19 di Indonesia

Model matematika penyebaran Covid-19 memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ )

dan titik kesetimbangan endemik penyakit ( $E_1$ ).

Diperoleh titik kesetimbangan bebas

penyakit adalah  $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu_1}, 0, 0, 0)$  dan titik

kesetimbangan endemik penyakit adalah

$E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ , dimana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial E} & \frac{\partial \Psi}{\partial I} \\ \frac{\partial^2}{\partial E} & \frac{\partial^2}{\partial I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu + \gamma \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S^* = \frac{(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)}{\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}$$

$$E^* = \frac{\Lambda}{\mu_2 + \beta} - \frac{\mu_1(\mu_3 + \gamma)}{\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}$$

$$I^* = \frac{\Lambda\beta}{(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)} - \frac{\beta\mu_1}{\alpha(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}$$

$$R^* = \frac{\Lambda\beta\gamma}{\mu_4(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \gamma)} - \frac{\beta\gamma\mu_1}{\alpha\mu_4(\theta(\mu_3 + \gamma) + \beta(1 - \theta))}$$

Berdasarkan analisis kestabilan menggunakan Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) akan bersifat stabil untuk

$R_0 < 1$  dan titik kesetimbangan endemik penyakit ( $E_1$ ) akan bersifat stabil untuk  $R_0 > 1$ .

#### D. Bifurkasi Hopf

Parameter  $\alpha$  dan  $\Lambda$  merupakan parameter bifurkasi. Untuk mengetahui keadaan nilai eigen sama dengan nol, akan disubstitusikan nilai parameter kedalam  $\lambda_{1,2,3,4} = 0$  pada titik kesetimbangan

endemik penyakit dengan menggunakan bantuan software Maple, sehingga diperoleh keadaan sebagai berikut:

- Keadaan  $\lambda_1 = 0$   
 $\alpha = 0$
- Keadaan  $\lambda_2 = 0$   
 $\alpha = -\frac{0.00115376}{\Lambda}$

- Keadaan  $\lambda_3 = 0$

$$\alpha = \frac{-0.060579061 + 0.000023596I}{\Lambda}$$

- Keadaan  $\lambda = 0$

$$\alpha = \frac{-0.060579061 - 0.000023596I}{\Lambda}$$

Sehingga dapat disimpulkan bifurkasi hopf model SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia

terjadi saat  $\alpha = -\frac{0.00115376}{\Lambda}$ .

#### E. Simulasi Numerik

Simulasi numerik pada penelitian ini dilakukan menggunakan software Matlab

R2017b. Simulasi numerik kestabilan dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 dan simulasi numerik bifurkasi hopf dilakukan dengan MATCONT pada Matlab R2017b.

TABEL II DATA COVID-19 DI INDONESIA

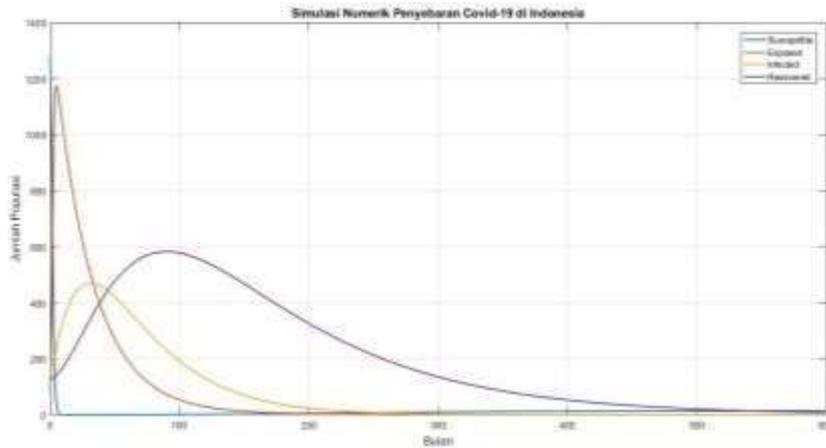
Tahun	Bulan	<i>Susceptible</i> ( <i>S</i> )	<i>Exposed</i> ( <i>E</i> )	<i>Infected</i> ( <i>I</i> )	<i>Recovered</i> ( <i>R</i> )	Kematian
2020	Agustus	1.282.618	77.951	172.053	124.185	7.343
	September	1.962.754	132.496	282.724	210.437	10.601
	Oktober	2.853.984	68.292	406.945	334.295	12.782
	November	3.797.881	70.792	534.266	445.793	16.815
	Desember	4.875.480	67.615	735.124	603.741	21.944
2021	Januari	6.125.290	74.985	1.066.331	862.502	29.728
	Februari	7.173.023	78.746	1.329.074	1.126.054	35.981
	Maret	8.445.150	60.671	1.505.775	1.342.695	40.754
	April	9.769.757	66.295	1.662.868	1.517.432	45.334
	Mei	11.197.817	105.518	1.816.041	1.663.998	50.404
	Juni	13.225.859	132.723	2.156.465	1.869.606	58.024
	Juli	17.712.645	278.546	3.372.374	2.730.720	92.311
	Agustus	21.487.697	248.333	3.669.966	3.760.497	133.023

Berdasarkan Tabel II, nilai parameter ditentukan sebagai berikut:

TABEL III  
NILAI PARAMETER

Parameter	Nilai	Referensi
$\Lambda$	0,13774	Estimasi
$\alpha$	0,00116	Estimasi
$\beta$	0,02385	Estimasi
$\gamma$	0,02479	Estimasi
$\mu_1$	0,0098	Asumsi
$\mu_2$	0,0098	Asumsi
$\mu_3$	0,00086	Estimasi
$\mu_4$	0,0098	Asumsi

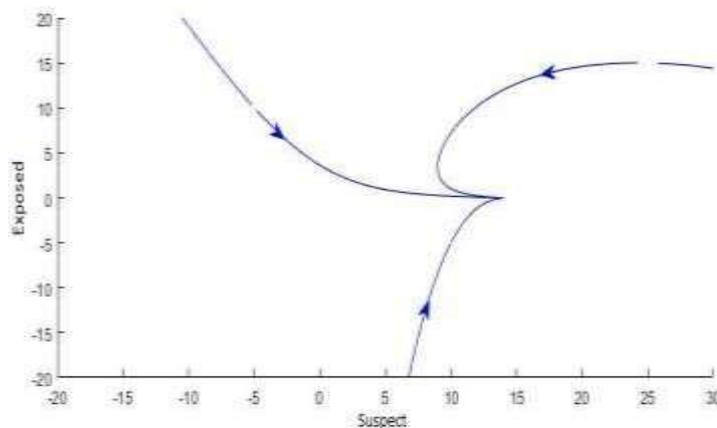
1. Simulasi numerik analisis kestabilan dilakukan dengan menggunakan nilai awal berdasarkan Tabel II, yaitu  $E_0 = 78$ ,  $I_0 = 172$  dan  $R_0 = 124$  pada periode waktu simulasi 600 bulan berdasarkan Tabel II, yaitu  $S_0 = 1283$ ,



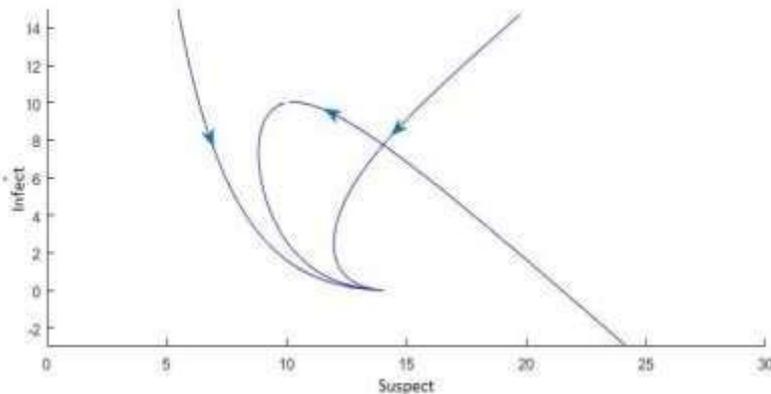
Gambar 2. Analisis Kestabilan Model SEIR Penyebaran Covid-19

Pada Gambar 2. ditunjukkan grafik perubahan jumlah individu dari subpopulasi susceptible, exposed, infected dan recovered selama 400 bulan. Grafik dinamika Covid-19 pada Gambar 2. menunjukkan bahwa penyebaran Covid-19 di Indonesia tanpa penerapan strategi kontrol akan mencapai titik stabil setelah bulan ke-500.

2. Simulasi bifurkasi hopf dilakukan menggunakan nilai parameter berdasarkan Tabel III. Pada bifurkasi hopf akan dilakukan simulasi subpopulasi terhadap subpopulasi lainnya yaitu simulasi subpopulasi *susceptible* terhadap *exposed*, simulasi subpopulasi *susceptible* terhadap *infected* dan simulasi subpopulasi *exposed* terhadap *infected* menggunakan MATCONT pada Matlab sebagai berikut



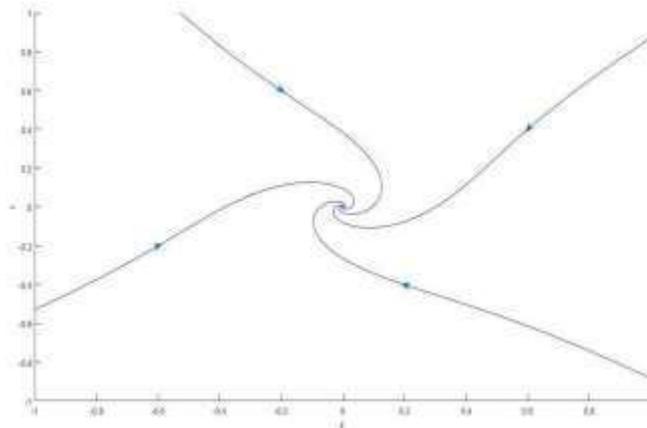
Gambar 3. Simulasi Numerik S terhadap E



Gambar 4. Simulasi Numerik S terhadap I

Gambar 3. dan Gambar 4. menunjukkan bahwa orbit berkumpul pada titik (14,0) dan tidak terbentuk *limit cycle* pada sistem, dikarenakan

sistem ini menjauhi titik kesetimbangan (0,0). Sehingga, dapat disimpulkan kasus ini tidak terjadi bifurkasi hopf



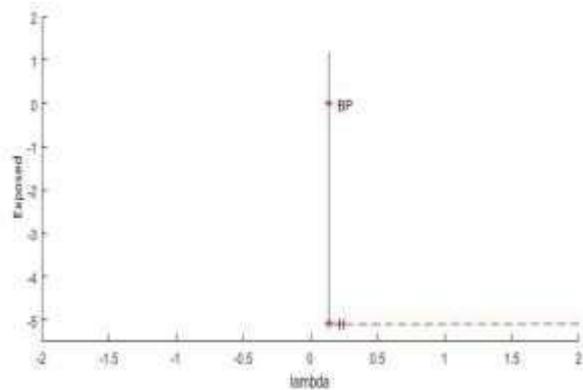
Gambar 5. Simulasi Numerik E terhadap I

Gambar 5. menunjukkan bahwa terjadinya bifurkasi hopf dengan terbentuknya *limit cycle*, maka diperoleh bahwa pada sistem tersebut memiliki satu *limit cycle*. Dan terjadinya bifurkasi hopf supercritical, dapat dilihat pada simulasi diatas yang memiliki bentuk stabil spiral.

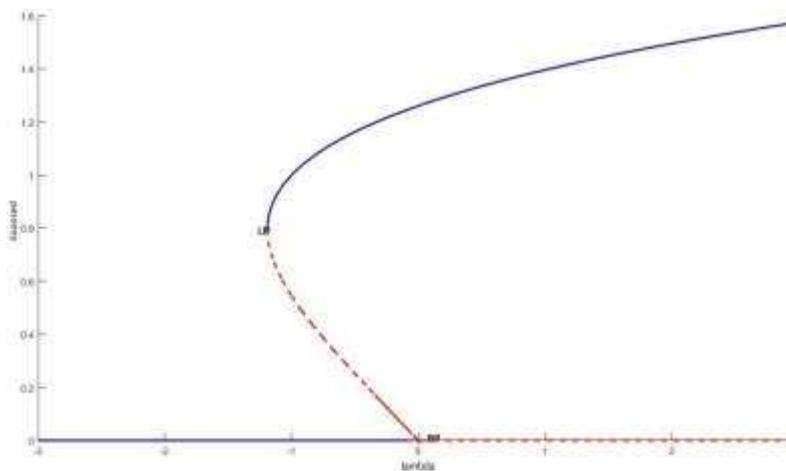
dan *infected* terhadap parameter  $\alpha$  dan  $\Lambda$  dengan memvariasikan nilai parameter yaitu  $\alpha = 0.1, \alpha = 0.01$  dan  $\alpha = 0.001$  guna membuktikan terjadinya bifurkasi hopf pada variabel terhadap parameter. Hasil simulasi sebagai berikut.

Karena terjadinya bifurkasi hopf pada simulasi numerik *exposed* terhadap *infected*, selanjutnya akan dianalisis simulasi subpopulasi *exposed*

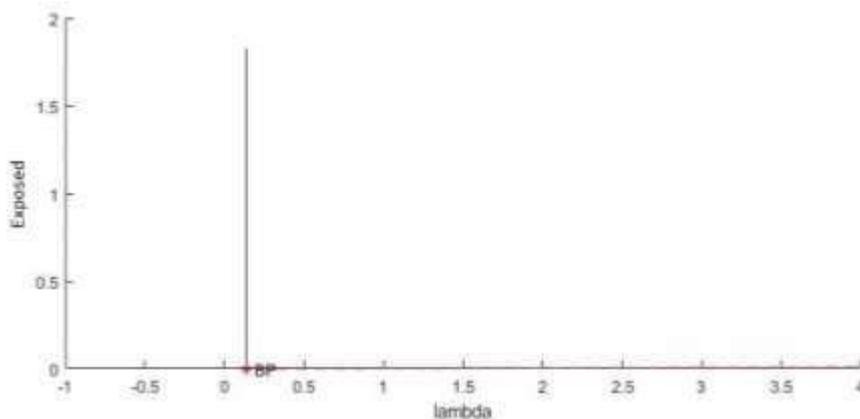
Diagram bifurkasi *exposed* terhadap  $\Lambda$



Gambar 6. Simulasi *exposed* terhadap lambda dengan  $\alpha = 0.1$



Gambar 7. Simulasi *exposed* terhadap lambda pdengan  $\alpha = 0.01$

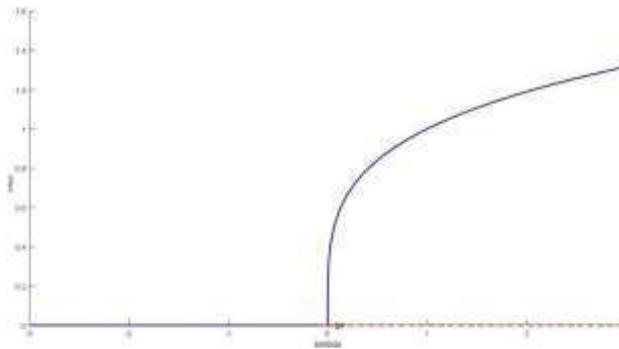


Gambar 8. Simulasi *exposed* terhadap lambda dengan  $\alpha = 0.001$

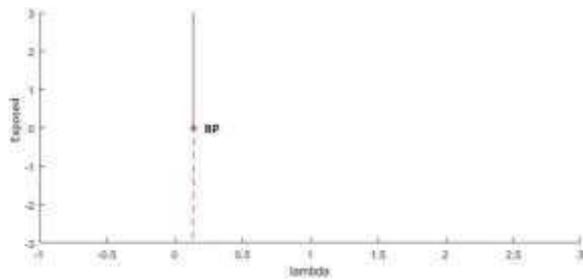
Pada Gambar 6., Gambar 7. dan bifurkasi hopf ditandainya dengan Gambar 8 dapat dilihat terjadi munculnya branching point (BP) dan

hopf (H) pada ketiga diagram tersebut yang ditandai dengan garis merah dan akan mengalami ketidakstabilan putus-putus.

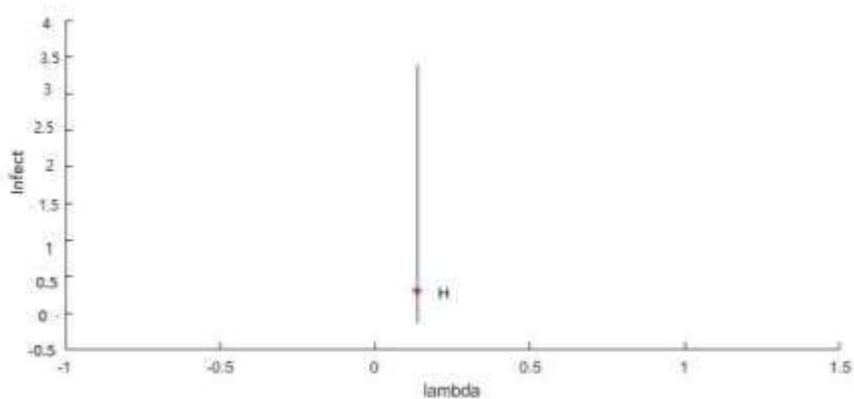
▪ Diagram bifurkasi *infected* terhadap  $\Lambda$



Gambar 9. Simulasi *infected* terhadap lambda dengan  $\alpha = 0.1$



Gambar 10. Simulasi *infected* terhadap lambda dengan  $\alpha = 0.01$



Gambar 11. Simulasi *infected* terhadap lambda dengan  $\alpha = 0.001$

Berdasarkan Gambar 9., Gambar 10. dan Gambar 11 ditunjukkan terjadi bifurkasi hopf yang ditandai dengan garis merah putus-putus. munculnya branching point (BP) dan hopf (H) pada ketiga diagram tersebut dan akan mengalami ketidakstabilan

## KESIMPULAN

Model SEIR penyebaran Covid-19 memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) dan titik kesetimbangan endemik penyakit ( $E_1$ ). Kedua titik kesetimbangan dari model akan bersifat stabil jika memenuhi syarat parameter tertentu.

Simulasi numerik analisis kestabilan dengan menggunakan data penyebaran Covid-19 di Indonesia menunjukkan bahwa dinamika Covid-19 di Indonesia akan mencapai titik stabil setelah bulan ke-500 dan simulasi numerik bifurkasi hopf menunjukkan munculnya *limit cycle* pada simulasi *exposed* terhadap *infected* yang artinya terjadinya bifurkasi hopf pada subpopulasi tersebut dengan memvariasikan nilai parameter bifurkasi.

Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan penelitian ini dengan menambahkan perlakuan parameter vaksinasi untuk mengurangi penyebaran Covid-19 dan juga peneliti dapat menambah waktu tunda pada model penyebaran seperti penerapan karantina dan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM) karena waktu tunda pasti dapat berpengaruh secara signifikan dalam keseimbangan sistem. Peneliti selanjutnya juga dapat meneliti jenis bifurkasi lain yang mungkin terjadi pada sistem ini.

## REFERENSI

[1] Kampf, G., D. Todt, S. Pfaender Dan E. Steinmann. (2020)

Persistence of coronaviruses on inanimate surfaces and its inactivation with biocidal agents, *Journal of Hospital Infection*, 104(3), 246–251.

[2] WHO. (2021). *WHO Coronavirus Disease (Covid-19) Dashboard*. Diakses 10 Maret 2021, dari <https://covid19.who.int>

[3] Kemenkes, RI. (2021). *Sutasi Virus Covid-19 di Indonesia*. Diakses 10 Maret 2021, dari <https://covid19.go.id>

[4] Ouassou, H., Kharchoufa, L., Bouhrim, M., Daoudi, N.E., Imtara, H., Bencheikh, N., Elbouzidi, A. & Bouham, M. (2020). The Pathogenesis of Coronavirus Disease 2019 (Covid-19): Evaluation and Prevention. *Journal Immunology Research*, Volume 2020: 1-7.

<https://doi.org/10.1155/2020/1357983>

[5] Jiao, J., Liu, Z. & Cai, S. (2020). Dynamics of SEIR Model with Infectivity in Incubation Period and Homestead Isolation on the Susceptible. *Applied Mathematics Letters*, Volume 107: 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106442>.

[6] Rustan & Handayani, L. (2020). The Outbreaks Modeling of Coronavirus (Covid-19) Using the Modified SEIR Model in Indonesia. *SPEKTRA: Jurnal Fisika dan Aplikasinya*, Volume 5 (1): 61-68. <https://doi.org/10.21009/>

SPEKTRA

- [7] Gao, Zhiru, Xu Y., Sun C., Wang X., Guo Y., Qiu S. dan Ma K. (2020). A systematic Review of Asymptomatic Infections with COVID-19, *Journal of Microbiology, Immunology, and Infection*, 54(1)
- [8] Zizhen, Zhang, Soumen, K., Jai, Prakash Tripathi dan Sarita, Bugalia. (2020). Stability and Hopf bifurcation analysis of an SVEIR epidemic model with vaccination and multiple time delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 131.
- [9] Sinaga, L. P., Nasution, H. & Karitka, D. (2021). Stability Analysis of the Corona Virus (Covid-19) Dynamics SEIR Model in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 189 (2021): 1-9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1819/1/012043>