KARISMATIKA p-ISSN : 2443 – 0366
VOL. 3 NO. 2 AGUSTUS 2017 e-ISSN : 2528 -- 0279

PENGEMBANGAN TITIK MIQUEL LUAR PADA SEBARANG SEGIEMPAT

LYDIA AFRITALIA[1], MASHADI[2], SRI GEMAWATI[3]

[1]FMIPA Universitas Riau, lydiaafritalia@gmail.com
[2] FMIPA Universitas Riau, mashadi.mat@gmail.com
[3] FKIP Universitas Riau, gemawati.sri@gmail.com

Abstrak

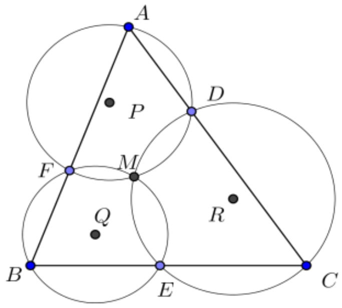
Teorema Miquel biasanya hanya diberlakukan pada segitiga. Dalam tulisan ini akan dikembangkan teorema Miquel pada segi empat, dan dibagi menjadi 2 kasus yaitu, segi empat konveks dan segi empat tak konveks. Kontruksi titik Miquel diperoleh dengan memperpanjang sisi segiempat sehingga membentuk 4 buah segitiga baru yang keempat lingkaran luar dari segitiga tersebut berpotongan pada satu titik, yaitu titik Miquel. Pembuktiannya dengan menggunakan konsep segiempat siklik

Keywords: *Teorema Miquel, segiempat konveks segiempat tak konveks, segiempat siklik*

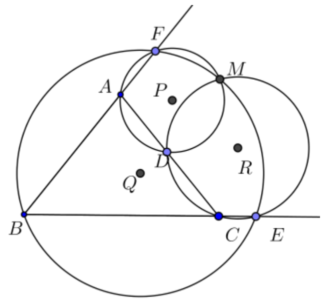
1. Pendahuluan

Teorema Miquel merupakan salah satu teorema yang dikaji dalam bidang geometri. Teorema ini pada awalnya diterapkan pada bangun datar segitiga yang dibahas oleh Walles pada tahun 1799 dan kemudian dibuktikan oleh Miquel pada tahun 1838 [7]. Posamentier menyatakan Teorema Miquel dikontruksi pada sebarang segitiga kemudian di pilih sebarang titik pada setiap sisinya, maka lingkaran yang melalui setiap vertex dan titik-titik yang berada pada sisi yang berdekatan berpotongan di satu titik yaitu titik Miquel. Seperti yang terlihat pada Gambar 1 dan Gambar 2, lingkaran P, Q dan R berpotongan di titik M.

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 -- 0279



Gambar 1 : Titik Miquel *M* di dalam segitiga



Gambar 2 : Titik Miquel *M* di luar segitiga

Beberapa pengembangan Teorema Miquel pada segitiga telah dibahas dibeberapa buku dan jurnal [1,2,4,8]. Pada makalah ini Teorema Miquel dibuktikan dengan menggunakan konsep yang dipahami oleh siswa tingkat SMP dan SMA yaitu konsep lingkaran dan segiempat siklik [5,6].

Berdasarkan teorema Miquel pada sebarang segitiga yang telah dibahas oleh beberapa penulis sebelumnya seperti oleh Posamentier, terdapat titik Miquel di dalam dan di luar segitiga. Berdasarkan hal tersebut maka penulis melakukan percobaan dengan menggunakan aplikasi geogebra, ternyata titik Miquel juga terdapat pada sisi segitiga dengan memenuhi syarat – syarat tertentu. Sehingga, jika dikelompokkan berdasarkan posisinya, titik Miquel dapat dibagi dalam 3 kasus, yaitu titik Miquel di dalam segitiga, titik Miquel di luar segitiga dan titik Miquel pada sisi segitiga. Selanjutnya penulis juga menemukan bahwa titik Miquel juga terdapat pada segiempat konveks dan tak konveks.

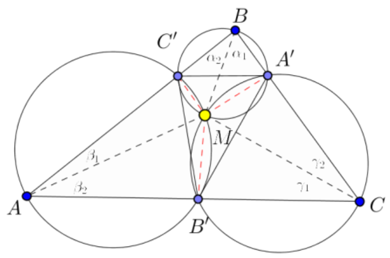
2. Teorema Miquel pada Segitiga

Berdasarkan Teorema Miquel yang dibentuk dari sebarang titik yang dipilih pada setiap sisi segitiga dan lingkaran luarnya berpotongan pada satu titik, maka beberapa percobaan telah dilakukan penulis dengan menggunakan aplikasi geogebra, maka berdasarkan posisinya, titik Miquel pada segitiga dibagi dalam 3 kasus, yaitu:

a. Teorema Miquel untuk kasus titik Miquel yang berada di dalam segitiga.

Sebagaimana yang telah diuraikan penulis pada pendahuluan, bahwa teorema Miquel pada segitiga untuk kasus titik Miquel di dalam segitiga telah dibahas dibeberapa buku dan artikel [1,2,4,8]. Berdasarkan hal tersebut, penulis mengembangkan dan merumuskan sebuah teorema tentang titik Miquel yang berada di dalam segitiga, yaitu sebagai berikut:

Teorema 1 Pada sebarang ▲ *ABC*, jika yang terbentuk adalah segitiga Miquel $A'B'C'$ lancip, maka titik Miquelnya berada di dalam ▲ *ABC*. (Gambar 3)



Gambar 3. Titik Miquel di dalam ▲ *ABC*

Bukti*:* Diketahui ▲ $A'B'C'$ adalah lancip, akan dibuktikan titik Miquel selalu berada di dalam ▲ *ABC*. Hal ini dapat dilihat dengan jelas pada Gambar 3, akibat dari segitiga Miquel yang terbentuk adalah segitiga lancip, yang mengakibatkan ▲ $A'B'C$, ▲ $AB'C'$, dan ▲ $A'BC'$ juga lancip, sehingga titik potong lingkaran luar dari ketiga segitiga tersebut berada pada perpotongan busur $A'B'$, busur $A'C'$, dan busur $C'B'$. Sehin gga menyebabkan titik Miquel *M* berada di dalam ▲ ABC. Pembuktian dengan cara lain juga dapat dilakukan yaitu dengan membuktikan bahwa:

$$\angle A'MB + \angle C'MB' + \angle C'MA' = 360°$$

Hal ini dapat dengan mudah langsung dibuktikan, dengan bantuan sudut keliling lingkaran maka akan diperoleh :

$\angle A'MB + \angle C'MB' + \angle C'MA'$

$= 180° - (\gamma_1 + \gamma_2) + 180° - (\beta_1 + \beta_2) + 180° - (\alpha_1 + \alpha_2)$

$= 540°$ - $180°$

$= 360°$

Karena terbukti :

$\angle A'MB + \angle C'MB' + \angle C'MA' = 360°$

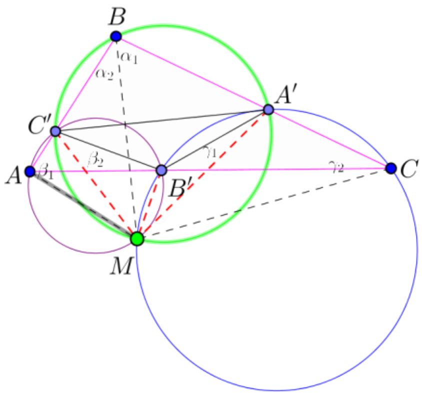
maka, dapat disimpulkan bahwa titik Miquel M berada di dalam ▲ ABC.

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 -- 0279

b. Teorema Miquel untuk Kasus Titik Miquel yang Berada di Luar Segitiga

Seperti halnya pada kasus 1, pada kasus yang kedua ini juga merupakan pengembangan dari teoerema Miquel pada segitiga, namun titik Miquelnya berada di luar segitiga. Berikut diberikan teorema Miquel untuk titik Miquel di luar segitiga.

Teorema 2 Pada sebarang ▲ *ABC*, jika yang terbentuk adalah segitiga Miquel $A'B'C'$ tumpul, maka titik Miquelnya berada di luar ▲ *ABC*. (Gambar 4)



Gambar 4. Titik Miquel di luar ▲ *ABC*

Bukti*:* Diketahui ▲ $A'B'C'$ adalah tumpul, akan dibuktikan titik Miquel selalu berada di luar ▲ *ABC*. Hal ini dapat dilihat dengan jelas pada Gambar 4, akibat dari segitiga Miquel yang terbentuk adalah segitiga tumpul, yang mengakibatkan ▲ $A'B'C$, ▲ $AB'C'$, dan ▲ $A'BC'$ juga tumpul, sehingga titik potong lingkaran luar dari ketiga segitiga tersebut berada pada perpotongan busur $B'C$, busur AB', dan busur $C'A'$. Sehingga menyebabkan titik Miquel *M* berada di luar ▲ ABC. Dengan cara yang sama seperti pada pembuktian teorema 1, maka dengan bantuan sudut keliling lingkaran, dapat langsung ditunjukkan bahwa

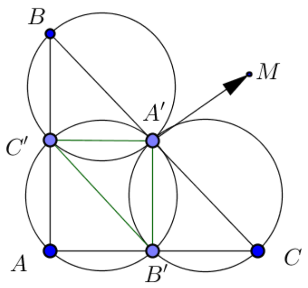
$\angle C'MB' + \angle B'MA + \angle C'MA' < 360°$, sehingga terbukti titik Miquel *M* berada di luar ▲ ABC

c. Teorema Miquel untuk kasus Titik Miquel yang Berada pada sisi segitiga.

Khusus untuk titik Miquel yang berada pada sisi segitiga, maka ada beberapa syarat yang harus dipenuhi yaitu segitiga asala haruslah segitiga siku – siku dan pemilihan titik di setiap sisi segitiga asal haruslah median dari sisi – sisi nya tersebut.

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 -- 0279

Teorema 3 Pada segitiga siku – siku ABC, jika yang terbentuk adalah segitiga Miquel $A'B'C'$ siku –siku, maka titik Miquelnya berada pada sisi ▲ ABC (Gambar 5)



Gambar 5. Titik Miquel pada sisi ▲ *ABC*

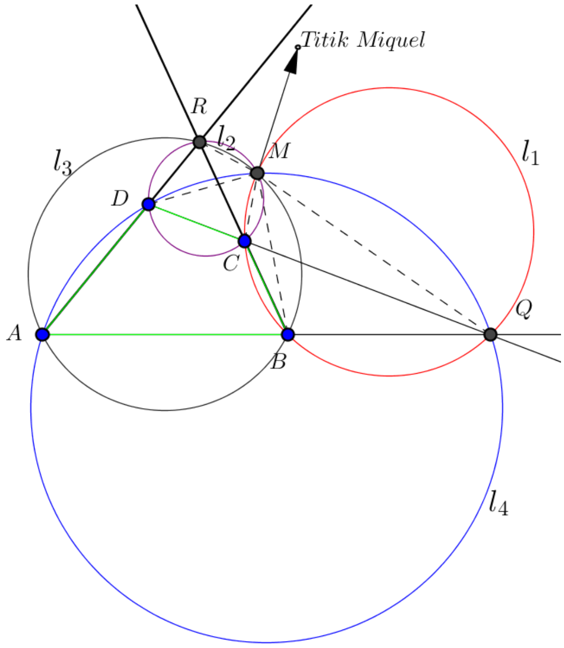
Bukti*:* Diketahui ▲ $A'B'C'$ adalah siku - siku, akan dibuktikan titik Miquel selalu berada pada sisi ▲ *ABC*. Hal ini dapat dilihat dengan jelas pada Gambar 5. Karena yang terbentuk adalah segitiga Miquel $A'B'C'$ juga siku – siku, maka dengan cara yang sama seperti teorema 1 dan 2 dapat ditunjukkan bahwa $\angle BMC' + \angle C'MB + \angle B'M = 180°$

Sehingga terbukti titik Miquel *M* berada pada sisi ▲ *ABC.*

Selanjutnya , pengembangan teorema Miquel pada segiempat, khususnya di luar segiempat konveks dan segiempat tak konveks.

Teorema 4 Jika *ABCD* adalah sebuah segiempat konveks, titik *R* dan *Q* merupakan titik potong dari masing – masing perpanjangan sisi *AD* dan *BC* serta perpanjangan sisi *AB* dan *CD*, maka lingkaran luar dari ▲ *ABR*, ▲ *ADQ*, ▲ *BCQ* dan ▲ *CDR* akan berpotongan pada satu titik, yaitu titik Miquel *M* (Gambar 3).

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 -- 0279



Gambar 3 : Titik Miquel luar segiempat konveks

Bukti : Misalkan lingkaran luar ▲*BCQ,* adalah l_1, lingkaran luar ▲ *CDR* adalah l_2, lingkaran luar ▲ *ABR* adalah l_3, dan lingkaran luar ▲ *ADQ* adalah l_4 (Gambar 3). Berdasarkan bukti teorema Miquel pada segitiga, maka *M* merupakan titik potong dari l_1, l_2, dan l_3. Akan ditunjukkan bahwa titik *M* juga berada di l_4. Kontruksi garis *BM*, *CM*, *DM*, *QM* dan *RM*, sehingga diperoleh:

$$\angle DMQ = \angle DMC + \angle CMB + \angle BMQ. \qquad (1)$$

Diketahui juga bahwa $\angle DAB + \angle DRC + \angle CBA = 180^0$ (dari ▲ *ADQ*), sehingga diperoleh:

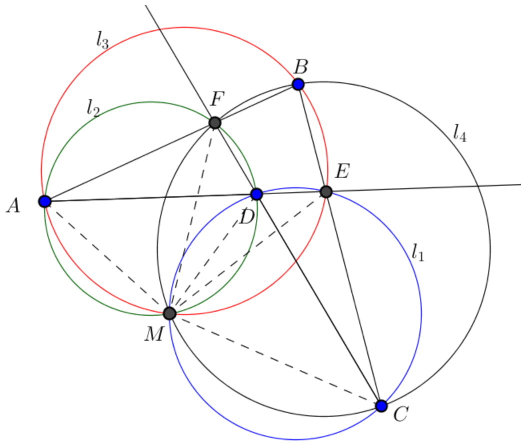
$$\angle DAB = 180^0 - (\angle DRC + \angle CBA). \qquad (2)$$

Gunakan perhitungan aljabar untuk menunjukkan $\angle DMQ + \angle DAB = 180^0$, yaitu dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2). Sehingga terbukti bahwa $\angle DMQ + \angle DAB = 180^0$, akibatnya, segiempat *ADMQ* siklik. Berdasarkan defenisi segiempat siklik, maka titik *A*, *D*, *M* dan *Q* terletak pada kelililing lingkaran l_4. Secara langsung hal ini menunjukkan bahwa titik *M* juga berada di l_4. Dengan demikian terbukti bahwa keempat lingkaran yaitu l_1, l_2, l_3 dan l_4 berpotongan dititik Miquel *M*. Terbukti $AEMH$ juga merupakan segiempat siklik. Sehingga lingkaran l_1, l_2 , l_3 dan

 p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 -- 0279

l_4.berpotongan pada titik M atau titik Miquel.

Teorema 5 Jika $ABCD$ adalah sebuah segiempat tak konveks, perpanjangan AD memotong BC di titik E dan perpanjangan CD memotong AB di titik F. Maka lingkaran luar dari ▲CDE, ▲ADF, ▲ABE dan ▲BCF akan berpotongan pada satu titik, yaitu titik M.



Gambar 4 : Titik Miquel di luar segiempat tak konveks

Bukti : Misalkan lingkaran luar dari ▲CDE adalah l_1, lingkaran luar dari ▲ADF adalah l_2, lingkaran luar dari ▲ABE adalah l_3 dan lingkaran luar dari ▲BCF adalah l_4 (Gambar 4).

Berdasarkan bukti teorema Miquel pada segitiga, maka M merupakan titik potong dari l_1, l_2, dan l_3. Akan ditunjukkan bahwa titik M juga berada di l_4. Kontruksi garis AM, FM, DM, EM dan CM, sehingga diperoleh:

$$\angle FMC = \angle FMD + \angle DME + \angle EMC. \qquad (3)$$

Dari ▲BAE diperoleh: $\angle FBE = 180^0 - (\angle BAD + \angle BED)$. Karena $\angle FBE = \angle FBC$, maka:

$$\angle FBC = 180^0 - (\angle BAD + \angle BED). \qquad (4)$$

Gunakan perhitungan aljabar untuk menunjukkan $\angle FMC + \angle FBC = 180^0$, yaitu dengan menjumlahkan persamaan (3) dan (4). Sehingga terbukti bahwa $\angle FMC + \angle FBC = 180^0$, akibatnya, segiempat $CBFM$ siklik. Berdasarkan defenisi segiempat siklik, maka titik C, B, F dan M terletak pada kelililing lingkaran l_4. Secara langsung hal ini menunjukkan bahwa titik M juga berada di l_4. Dengan demikian terbukti bahwa keempat lingkaran yaitu l_1, l_2, l_3 dan l_4 berpotongan dititik

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 -- 0279

Miquel *M*.

3. Kesimpulan

Teorema Miquel yang biasanya diterapkan pada segitiga, juga dapat diterapkan pada segiempat konveks dan tak konveks, dengan cara mengkontruksi segitiga diluar segiempat konveks dan tak konveks menggunakan bantuan perpanjangan garis pada sisi – sisi segiempat tersebut. Sehingga akan dapat dilihat Titik Miquel luar pada segi empat konveks dan tak konveks. Secara matematis dapat dibuktikan dengan menggunakan bantuan segiempat siklik dan sudut keliling lingkaran.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. S. Posamentier. (2002), *Advanced Euclidian Geometry*, Key College Publishing, New York

[2] A. S. Posamentier dan I. Lehmann. (2012). *The Secreet of Triangle*, Prometheus Books, New York.

[3] Hohenwarter, M. et al. (2008) *Teaching and learning Calculus WITH Free Dynamic Matgematics Software Geogebra.* . http://www.publications.uni.lu/recored/2718/files/ICME11-TSG16.pdf

[4]. I. E. Leonard, J. E Lewis, A. C. F Liu dan G. W. Tokarsky. (2014). *Classical Geometry*, Wiley, Canada.

[5] Mashadi. (2015). *Geometri* (edisi kedua), Unri Press, Pekanbaru.

[6] Mashadi. (2016). *Pengajaran Matematika*, UR Press, Pekanbaru.

[7] M. D. Villier. (2014). *A Variation of Miquel Theoreme and its generalization*, The Mathematical Gazzete, 334-339.

[8] P.Yiu. (2002). *Introduction to the Geometry of Triangle.* Departement Mathematics florida Atlantic University.

[9] R.A.Johnson (1960). *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publication, Inc. New York.

[10] Robin Park, *Cyclic Quadrilateral*, Tsusamo,2013

[11]Yufei Zhao, *Cyclic Quadrilateral - The Big Picture*, Winter Camp, 2009.