KARISMATIKA – ISSN : 2443 – 0366
TAHUN 2 VOL.2 NO. 1 APRIL 2016

GRAF PETERSEN DENGAN BEBERAPA SIFAT-SIFAT YANG BERKAITAN DALAM TEORI GRAF

Juneidi Ginting[1], Humuntal Banjarnahor[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan
Email : juneidi_g@yahoo.com
[2]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan

ABSTRAK

Paper ini menunjukkan keterkaitan antara Graf Petersen dengan sifat-sifat dalam teori graf, khususnya, planaritas, eulerian, hamiltonian, dan hipohamiltonian. Jadi, Pembahasan akan dimulai dari menunjukkan bahwa graf Petersen tidak Eulerian, kemudian ditunjukkan pula graf Petersen tidak planar. Akhir pembahasan akan ditunjukkan melalui dua cara bahwa graf Petersen tidak Hamiltonian, dan ditutup dengan ditunjukkannya graf Petersen sebagai graf Hipohamiltonian terkecil berderajat sepuluh.

Kata kunci: Graf Peterssen, Planar, Eulerian, Hamiltonian, Hipohamiltonian

ABSTRACT

This paper shows the relationship between Petersen Graph with properties in graph theory, in particular, Planaritas, Eulerian, Hamiltonian, and Hipohamiltonian. So, the discussion will begin from showing that the Petersen graph is not Eulerian, then also point Petersen graph is not planar. The end of the discussion will be shown in two ways that the Petersen graph is not Hamiltonian, and closed with the Petersen graph as the graph showed the smallest degree Hipohamiltonian ten.

Keyword: Petersen graph, Planaritas, Eulerian, Hamiltonian, Hipohamiltonian

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Saat itu dia memikirkan untuk menyeberangi semua jembatan di kota Kaliningrad, Rusia, tepat satu kali dan kembali ketempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dikenal dengan teori graf. Walaupun demikian, minat akan teori graf baru berkembang setelah tahun 1920 hingga akhirnya buku teks tentang teori graf muncul pada tahun 1936. Buku tersebut ditulis oleh Denes Konig dengan judul "*The Teory of Finite and Infinite Graphs*" yang diterjemahkan dari bahasa Jerman (Capobianco dan Molluzo, 1978). Sejak itulah minat terhadap teori graf berkembang pesat.

Daya tarik teori graf adalah penerapannya yang sangat luas, mulai dari ilmu komputer, kimia, fisika, biologi, sosiologi, teknik kelistrikan, linguistik, ekonomi, manajemen, pemasaran, hingga pemecahan teka-teki dan permainan asah otak. Walaupun penerapannya sangat banyak, yang menarik adalah bahwa teori graf hanya mempelajari titik dan garis.

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama.

Salah satu contoh graf yang paling dikenal dan sangat populer adalah graf Petersen. Graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Julius Petersen untuk menghargainya karena pada tahun 1898 ia membuktikan bahwa graf Petersen tidak terfaktor-1.

Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal (*counterexample*) di banyak tempat dan mempunyai banyak sifat-sifat menarik (Holton dan Sheehan, 1993). Dalam indeks buku "*Examples and Counterexamples in Theory Graph*" karangan Copabianco dan Molluzo (1978), graf Petersen muncul sebanyak sembilan kali sebagai contoh penyangkal maupun sifat unik yang berkaitan dengan macam-macam topik pada teori graf.

Banyak topik pada teori graf yang bisa dikaitkan dengan graf Petersen, diantaranya yaitu masalah
Planaritas, Eulerian, Hamiltonian, dan Hipohamiltonian, suatu graf. Pendekatan yang dapat dilakukan untuk mempelajari teori graf adalah dengan pendekatan aljabar, kombinatorik maupun geometris.

Karena penelitian diatas yang telah meneliti kaitan graf Petersen dengan salah satu teori graf pada sifat Faktorisasi penulis tertarik meneliti tentang hubungan graf Petersen dengan beberapa sifat-sifat dalam teori graf lainnya. Dengan pendekatan kombinatorik penulis akan menyelidiki graf Petersen merupakan graf Planar atau tidak. Dengan keterhubungan dikaitkan masalah Hamiltonian dan Eulerian, akan diselidiki graf Petersen merupakan graf Eulerian atau tidak, kemudian graf Hamitonian atau tidak. Akhirnya akan dikembangkan dengan menyelidiki kaitan antara Hipohamiltonian dengan graf Petersen.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literature yaitu metode yang penelitiannya dilakukan dengan menggunakan studi kepustakaan, yang bersumber dari buku, teks dan dokumen.

Prosedur Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Menyajikan tentang pengertian dasar graf.
2. Menyajikan tentang derajat graf.
3. Menyajikan tentang graf khusus.
4. Menyajikan tentang subgraf.
5. Menyajikan tentang keterhubungan pada graf.
6. Menyajikan tentang sifat-sifat terkait teori graf, yaitu Eulerian, Planaritas, Hamiltonian, serta Hipohamiltonian.
7. Menyelidiki apakah graf Petersen merupakan graf Eulerian , Planar ,atau graf Hamiltonian.
8. Menyelidiki kaitan antara Hipohamiltonian dengan graf Petersen.
9. Menarik kesimpulan.

Perencanaan Tindakan

Tahap perencanaan tindakan dilakukan setelah didapat data. Pada tahap perencanaan tindakan ini, hal-hal yang dilakukan adalah :

a. Menjelaskan tentang beberapa jenis-jenis graf seperti, derajat graf, graf khusus, subgraf, keterhubungan pada graf beserta sifat-sifat terkait teori graf.
b. Menyiapkan data graf Petersen.
c. Menyelesaikan masalah menggunakan graf planar, eulerian, hamiltonian,

selanjutnya mencari keterkaitan hipohamiltonian dengan graf Petersen.

Pelaksanaan Tindakan

Setelah perencanaan tindakan dilakukan dengan matang, maka tahap selanjutnya adalah pelaksanaan tindakan. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Dalam hal ini peneliti mempelajari tentang graf planar, eulerian, hamiltonian, dan hipohamiltonian dari berbagai sumber.
2. Peneliti selanjutnya menyelesaikan dengan graf Petersen.
3. Mencari keterkaitan antara hipohamiltonian dengan graf Petersen.

Pada akhir tindakan, peneliti menentukan graf apa yang merupakan termasuk bagian dari graf Petersen.

Analisis dan Refleksi

Setelah melakukan beberapa tindakan pembahasan tentang graf planar, eulerian, hamiltonian, dan hipohamiltonian, maka akan dilakukan pembahasan selanjutnya dengan mencari keterkaitannya dengan graf Petersen.

Kegiatan refleksi peneliti didasarkan pada pembahasan. Hal-hal yang dilakukan dalam refleksi tindakan adalah sebagai berikut:

a. Membahas graf Petersen merupakan planar?
b. Membahas graf Petersen merupakan eulerian?
c. Membahas graf Petersen merupakan hamiltonian?
d. Membahas graf Petersen merupakan hipohamiltonian?

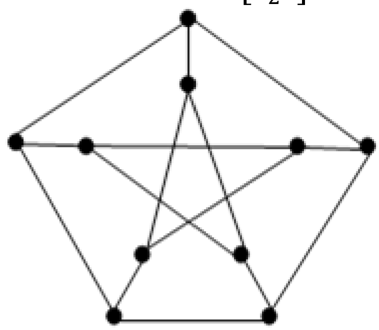
Graf Petersen merupakan graf hipohamiltonian terkecil dengan sepuluh titik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf Petersen

Kajian mengenai graf Petersen dalam penelitian ini yaitu graf Petersen merupakan graf lengkap (complete graph), graf teratur (regular graph), dan graf isomorfik (isomorphic graph).

Graf Petersen adalah graf teratur berderajat 3 $(r = 3)$ pada semua simpulnya dan graf yang telah diperumum.Graf Petersen diperumum **(***generalized petersen graph***)** merupakan graf yang terdiri dari n simpul luar u_i, n busur luar $u_i u_{i+1}$, n jeruji $u_i v_i$, n simpul dalam v_i dan n busur dalam $v_i v_{i+m}$, $0 \leq i \leq n-1$ dengan indeks merupakan modulo dari n. Graf petersen diperumum dinyatakan sebagai $P(n, m)$ dengan nilai n menyatakan banyaknya simpul luar (sama dengan banyak simpul dalam) dan nilai m menyatakan lompatan busur dalam, dimana $n \geq 3$, $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.



Gambar 2.11 Graf Petersen

Pada Gambar 2.11 merupakan salah satu jenis graf *Petersen* yang telah diperumum berderajat 3 dengan n = 5 dan m = 2.

Graf Petersen dan Eulerian

Teorema 1 *Diketahui G graf terhubung. Suatu Graf G memiliki jalur Eulerian jika dan hanya jika semua titik pada graf berderajat genap, kecuali dua titik yang berderajat ganjil.*

Bukti :

$(\Longrightarrow)$ Diketahui bahwa suatu G memiliki jalur Eulerian. Jika suatu jalur Eulerian ditelusuri akan terlihat bahwa setiap kali jalur ini bertemu dengan sebuah titik, ia akan melalui dua garis yang insiden dengan titik tersebut dan belum pernah ditelusuri sebelumnya. Jadi, kecuali untuk kedua titik di kedua ujung jalur, derajat titik di dalam graf pasti genap. Jika kedua titik di kedua ujung jalur Eulerian ini berbeda, hanya keduanyalah yang merupakan titik berderajat ganjil. Jika keduanya berimpitan (titik ujungnya sama), berarti semua titik berderajat genap dan jalur Eulerian tersebut berupa sirkuit Eulerian. Jadi, syarat perlu telah dibuktikan.

(⟸) Untuk membuktikan syarat cukupnya, akan dibangun suatu jalur Eulerian mulai dari salah satu dari dua titik yang berderajat ganjil dan akan menempuh semua garis graf sedemikian sehingga tidak ada garus yang ditelusuri lebih dari sekali. Untuk titik yang berderajat genap, bila jalur tersebut menuju (masuk) ke titik melalui sebuah garis, ia selalu bisa melanjutkan (meninggalkan) titik tersebut melalui rusuk yang lain yang belum ditelusuri. Oleh karenanya, ketika jalur yang dibangun tersebut berakhir, pasti sampai (diakhiri) ke titik berderajat ganjil lainnya. Jika semua garis di dalam graf itu ditelusuri dengan cara seperti ini, akan diperoleh sebuah jalur Eulerian.

Jika tidak semua garis di dalam graf itu tertelusuri, garis-garis yang tertelusuri itu akan dibuang dan akan diperoleh subgraf yang terbentuk oleh garis-garis yang tersisa. Semua titik di dalam subgraf tersebut berderajat genap. Lebih lanjut, subgraf tersebut pasti menyinggung jalur yang telah dilalui di satu atau lebih titik karena graf diketahui terhubung. Dimulai dari salah satu titik pada subgraf, sekali lagi akan dapat dibuat sebuah jalur yang melalui garis-garis tersebut. Karena semua titik berderajat genap, jalur pada akhirnya akan kembali ke titik awal dimulainya jalur.

Dengan demikian, jalur pada subgraf dapat digabung dengan jalur yang telah dihasilkan sebelumnya untuk mendapatkan jalur yang bermula dan berakhir di kedua titik yang berderajat ganjil. Jika diperlukan, cara ini dapat diulang hingga didapat suatu lintasan yang melalui semua garis di dalam graf tersebut.

Akibat dari Teorema 1 adalah Teorema 2 yang menunjukkan syarat perlu dan cukup suatu graf dikatakan graf Eulerian.

Teorema 2 *Diberikan suatu graf G yang terhubung. Graf G Eulerian jika dan hanya jika setiap titik G berderajat genap.*

Bukti :

(⟹) Diketahui bahwa graf G Eulerian berarti G mempunyai suatu sirkuit Eulerian. Dalam melakukan penelusuran terhadap sirkuit Eulerian tersebut, maka pada setiap titik yang dilalui harus dilakukan dua hal berikut. Pertama adalah bahwa titik pada graf akan dikunjungi melalui suatu garis tertentu, kemudian titik tersebut ditinggalkan dengan melalui salah satu garis yang lain. Oleh karena setiap garis dari graf G adalah bagian dari sirkuit Eulerian, maka terlihat bahwa setiap titik G mempunyai derajat genap (setiap mengunjungi suatu titik, derajat dari titik tersebut bertambah dengan kelipatan dua, yaitu satu garis yang masuk ke titik dan satu garis yang ke luar dari titik).

Diketahui bahwa graf G mempunyai titik berderajat genap. Diambil sembarang titik v dari graf G dan misalkan α adalah jalur terpanjang yang dapat dibuat dari titik v ke titik lain w. Sekarang dimisalkan bahwa $v \neq w$, dengan demikian titik w akan insiden dengan sebanyak ganjil garis pada α. Oleh karena diketahui bahwa setiap titik mempunyai derajat genap, maka pasti ada satu garis lagi yang belum digunakan yang insiden dengan suatu titik y. Hal tersebut berarti ada jalur β yang lebih panjang dari α, sehingga bertentangan dengan pemisalan bahwa α adalah jalur terpanjang. Jadi, pemisalan bahwa titik $v \neq w$ tidak benar.

Dengan demikian jelas bahwa titik $v = w$ dan itu berarti α merupakan suatu sirkuit. Selanjutnya masih harus ditunjukkan bahwa setiap garis dari G berada di dalam α. Bila hal ini dipenuhi, maka sirkuit α merupakan sirkuit Eulerian dalam G dan bukti selesai.

Sebaliknya, apabila tidak dipenuhi maka harus ada sekurang-kurangnya satu garis lain (katakan sebagai garis e) dari G yang tidak termasuk dalam α. Oleh karena G adalah graf terhubung, maka garis e tersebut dapat dipilih sedemikian sehingga garis e insiden dengan sebuah titik z (yang dilalui oleh sirkuit α). Jadi, garis e menghubungkan (insiden dengan) suatu titik z yang dilalui oleh sirkuit α dan suatu titik lain (mungkin juga dilalui oleh sirkuit α).

Sekarang dibentuk suatu graf baru G’ yang merupakan bagian dari graf G tanpa titik dan garis yang dialui α. Oleh karena setiap titik G bertemu dengan sirkuit α sebanyak genap kali, dan karena diketahui bahwa setiap titik dari G mempunyai derajat genap, maka dengan demikian dapat disimpulkan bahwa setiap titik pada G’ akan mempunyai derajat genap. Perhatikan sekarang subgraf G’ yang terhubung. Dengan cara seperti pada graf G, maka dapat dicari suatu sirkuit dalam G, yang dimulai dari titik z dan kembali ke titik z, yaitu suatu sirkuit α'. Bila sirkuit α digabungkan dengan sirkuit α', maka diperoleh suatu sirkuit yang lebih panjang daripada sirkuit α, tetapi hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa sirkuit α adalah yang terpanjang. Jadi, pemisalan bahwa ada garis e lain yang tidak termasuk dalam α adalah salah, berarti terbukti bahwa α adalah sirkuit Euler.

Teorema 3 *Graf Petersen tidak Eulerian.*

Bukti: Setiap titik pada Graf Petersen berderajat tiga. Sehingga berdasarkan Teorema 2, Graf Petersen tidak Eulerian.

Graf Petersen dan Planar

Teorema 4 *(Teorema Euler) Jika G adalah graf planar terhubung dengan n, m dan f berturut-turut menyatakan banyaknya titik, garis dan permukaan dari graf G, maka graf memenuhi*

$$n + f = m + 2$$

Bukti:

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan induksi matematika. Teorema pasti benar untuk $m = 0$ dengan $n = 1$ (G terhubung) dan $f = 1$ (yaitu permukaan takhingga).

Andaikan teorema benar untuk G dengan $m = 1$ garis, persoalan selesai jika dapat dibuktikan berlakunya teorema untuk G dengan banyak garis sama dengan m. Kemudian tambahkan pada G satu garis baru yaitu garis e, maka berlaku salah satu:

(i) Jika e merupakan gelung, maka timbul permukaan baru tetapi banyaknya titik tidak berubah.

(ii) Jika e hanya insiden dengan salah satu titik, maka dalam hal ini harus ditambahkan dengan satu titik lagi. Jadi banyaknya titik dari G bertambah satu, tetapi banyak permukaan tetap.

(iii) Jika e menghubungkan dua titik yang berlainan dari G dan e tersebut mengakibatkan satu permukaan pecah menjadi dua permukaan, maka banyaknya permukaan dari G bertambah, tetapi banyaknya titik tetap.

Teorema benar untuk G dengan banyak garis sama dengan m, maka terbukti.

Akibat 5 *Jika G adalah graf terhubung planar dengan banyaknya titik $n (n \geq 3)$ dan banyaknya garis m maka*

$$m \leq 3n - 6$$

Bukti:

Diketahui bahwa permukaan terbatas sekurang-kurangnya mempunyai tiga garis yang membatasi (derajat permukaan-terbatas sekurang-kurangnya tiga). Begitu pula sebuah garis membatasi paling banyak dua permukaan. Jadi didapat,

$$2m \geq 3f$$

Atau $\frac{2}{3}m \geq f.$

Dengan mensubstitusikan $f = m - n + 2$ dari Teorema Euler didapat

$$m - n + 2 \leq \frac{2}{3}m$$

$$m \leq 3n - 6$$

Teorema 6 *Graf Petersen tidak Planar*

Bukti:

Misalkan Graf Petersen planar. Diketahui bahwa Graf Petersen tidak mengandung segitiga atau siklus dengan panjang empat, maka Akibat 5 tidak dapat digunakan. Oleh karena Graf Petersen mempunyai sepuluh titik dan lima belas garis, maka tidak memenuhi Teorema 6 Kontradiksi. Jadi, terbukti bahwa Graf Petersen tidak planar.

Graf Petersen dan Hamiltonian

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa graf Petersen tidak hamiltonian melalui dua cara. Pembuktian pertama memanfaatkan sifat graf Petersen yang transitif-titik, dan cara kedua melalui titik konsitik.

Teorema 7 *Diberikan graf Petersen P, maka graf Petersen P tidak hamiltonian.*

Bukti :

Diberikan Graf Petersen P :

$$A = \{12,23,34,45,51\}$$

$$B = \{11', 22', 33', 44', 55'\}$$

$$C = \{1'3', 2'4', 4'5', 4'1', 5'2'\}$$

Merupakan himpunan bagian dari EP. Misalkan juga H merupakan siklus Hamiltonian dari graf Petersen.

Diketahui bahwa B merupakan sebuah himpunan garis potong dari P. Dengan demikian, H haruslah menggunakan banyak garis sebanyak genap dari garis-garis B. Oleh sebab itu, s mempunyai dua atau empat garis (karena maksimal garis yang dimiliki B adalah lima garis).

Karena graf Petersen transitif-garis, maka dapat diasumsikan bahwa $11' \in EH$. Maka salah satunya 12 atau 15 $\in EH$. Dengan sifat simetri, tanpa kehilangan keumuman, dapat diasumsikan bahwa $12 \in EH$.

Karena graf Petersen merupakan graf kubik, $15 \in EH$ dan karena itu $45,55' \in EH$ atau lainnya 5 tidak pada H.

Jika H menggunakan hanya dua garis B, yaitu $11'$ dan $55'$ maka $23,34$ EH

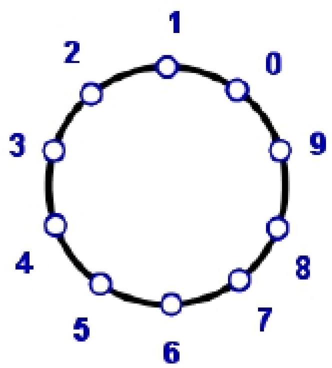
begitu pula $2'4', 2'5', 3'1', 3'5'$ dan $4'1'$. Akan tetapi keadaan ini memaksa dua titik $(1' dan\ 5')$ mempunyai derajat tiga pada siklus H. Akibatnya $|EH \cap B| = 4$.

Dengan sifat simetri salah satu dari $22', 44' \in EH$. Misalkan, tanpa kehilangan keumuman, bahwa $44' \in EH$. Karena $34 \notin EH$ ini, memaksa $23\ dan\ 33'$ menjadi garis dari H. Karena $|EH \cap B| = 4, 22' \notin EH$ dan akibatnya $2'4', 2'5' \in EH$. Hal ini berarti memaksa subsiklus $2', 5', 5, 4, 4', 2'$ pada H.

Oleh karena itu H tidaklah mungkin ada. Kontradiksi. Jadi, graf Petersen tidak Hamiltonian.

Pembuktian berikut menggunakan pengertian baru graf yaitu konsitik (***concytic***) yang diperkenalkan oleh Yanzhong Hu pada tahun 2010 melalui papernya, "*New Proof of Some Properties about Petersen Graph*" (Hu, 2010). Sebelum dibuktikan graf Petersen tidak Hamiltonian, akan dimulai dari definisi keliling suatu graf, titik konsitik, kemudian sifat yang terkait antara titik konsitik dan Hamiltonian suatu graf.

Dimisalkan graf Petersen P Hamiltonian. Melalui teorema diatas, berarti graf Petersen adalah titik konsitik.



Gambar 4.1 Awal konstruksi titik konsitik

Sepuluh titik pada graf Petersen dibentuk keliling dan diberi label 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 yang berlawanan arah seperti pada Gambar 4.1.

Diketahui bahwa setiap titik pada graf Petersen mempunyai derajat tiga dan titik graf petersen simetris. Maka terdapat empat kemungkinan bahwa titik dapat dihubungkan dengan titik lainnya seperti pada Gambar 4.2 (a),(b),(c),(d). Karena panjang siklus terpendek graf Petersen adalah lima, kasus (a) dengan panjang siklus tiga sehingga tidak mungkin. Begitu pula dengan kasus (b) yang mempunyai siklus dengan panjang empat sehingga tidak mungkin.

Untuk kasus (c) dan (d) dimungkinkan terjadi. Akan dibahas hanya kasus (d), karena kasus (c) dapat ditunjukkan dengan cara yang sama.

Pada kasus (d), terdapat enam macam kemungkinan bahwa titik 2 dapat bergabung dengan titik lainnya (Gambar 4.3 $(d_1), (d_2), (d_3), (d_4), (d_5), (d_6)$). Pada kasus selain kasus (d_3), siklus mempunyai panjang dibawah lima sehingga tidak mungkin.

Pada kasus (d_3) terdapat empat macam kemungkinan (Gambar 4.4 (a),(b),(c),(d)). Perhatikan bahwa pada semua kemungkinan tersebut, panjang siklus lebih kecil dari lima. Kontradiksi dengan panjang minimal siklus graf Petersen adalah lima. Jadi, terbukti graf Petersen tidak Hamiltonian.

Graf Petersen dan Hipohamitonian

Pada bagian ini, akan dibuktikan bahwa Graf Petersen merupakan graf khusus dan unik dalam kaitannya dengan graf hipohamiltonian. Pembahasan akan dimulai dengan pengertian hipohamiltonian, kemudian sifat-sifat graf

Hamiltonian dan diakhiri dengan dibuktikan bahwa Graf petersen merupakan satu-satunya graf hipohamiltonian dengan jumlah titik sepuluh dan graf hipohamiltonian terkecil.

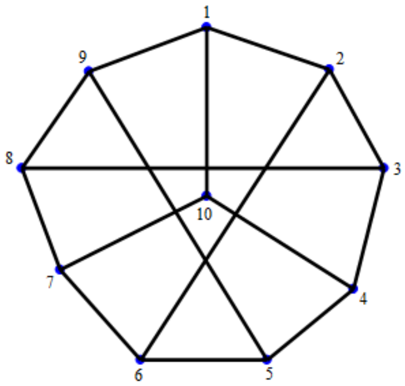
Teorema 8 *Graf Petersen (Gambar 4.9) adalah hipohamiltonian.*

Bukti:

Eliminasi titik 1 pada Graf P akan didapat siklus (10,4,3,2,6,5,9,8,7,10). Begitu pula dengan mengeliminasi titik 2 akan didapat siklus (10,1,9,8,3,4,5,6,7,10).

Kasus lain diperoleh dari kesimetrisan graf. Graf tidak mempunyai siklus Hamiltonian, sehingga lintasan maksimal yang dimuali dengan titik 10, 1, 2 adalah (6,5,4,3,8,7), (6,5,4,3,8,9), (6,5,9,8,3,4), (6,5,9,8,7), (6,7,8,3,4,5,9), (6,7,8,9,5,4,3), (3,4,5,6,7,8,9), (3,4,5,9,8,7,6), (3,8,7,6,5,4), (3,8,7,6,5,9), (3,8,9,5,4), (3,8,9,5,6,7) dan tidak ada satu pun yang memberikan suatu siklus Hamiltonian.

Dengan kesimetrisan dapat diterapkan untuk semua lintasan-lintasan yang lain.



Gambar 4.9 Graf Petersen

Berdasarkan Teorema 8 dapat terlihat bahwa graf Petersen merupakan graf hipohamiltonian terkecil berderajat sepuluh dan graf Petersen merupakan satu-satunya graf hipohamiltonian terkecil berderajat sepuluh.

KESIMPULAN

1. Graf Petersen bukan Eulerian.
2. Graf Petersen bukan Planar.
3. Graf Petersen bukan Hamiltonian
4. Graf Petersen merupakan graf hipohamiltonian terkecil dengan sepuluh titik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf.* Malang: UIN-Malang Press
[2] Aldous, Joan M and Robin J. Wilson. 2004. *Graph and Applications: an Introductory Approach.* Great Britian: Springer
[3] Balakrishnan, V. K., 1997, *Schaum's Outline of Theory and Problems of GraphTheory*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York.
[4] Biggs, N., 1974, *Cambridge Tracts in Mathematics 67: Algebraic Graph Theory*,Cambridge University Press, London.
[5] Busacker, R.G. dan Saaty, T.L., 1965, *Finite Graphs and Network: AnIntroductionWith Application*, McGraw-Hill Book Companies, New York.
[6] Capobianco, M. dan Molluzzo, J.C., 1978, *Examples and Counterexamples inGraph Theory*, Elsevier North-Holland, Inc., New York.
[7] Chartrand, G. dan Oellermann O.R., 1993, *Applied and Algoritmic Graph Theory*,McGraw-Hill, Inc., New York.
[8] Fraleigh, J.B. dan Katz, V., 1994, *A First Course in Abstract Algebra*, Fifth Edition,Addison-Wesley Publishing Conpany, Reading, Massachusetts.
[9] Gallian, J.A., 1990, *Contemporary Abstract Algebra*, second edition, D. C. Heathand Company, Lexington, Massachusetts.
[10] Harary, F., 1969, *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing

Company, Inc.,Reading, Massachusetts.

[11] Holton, D. A. dan Sheehan, J., 1993, *The Petersen Graph*, Cambridge UniversityPress, Cambridge.

[12] Hu, Y., 2010, New Proof of Some Properties about Petersen Graph, *2010 secondInternational Workshop on Education Technology and Computer Science*, 6-7 Maret 2010, 609-611, Wuhan.

[13] Liu, C.L., 1995, *Dasar-dasar Matematika Diskret*, edisi kedua, (diterjemahkanoleh Bambang Sumantri), Penerbit PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[14] Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit Logika, Himpunan, Matriks, Relasi, Fungsi, Algoritma, Kombinatorial, Peluang Diskrit Edisi Kelima*. Bandung : Informatika

[15] Siang, JJ. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta

[16] Slamet, S. dan Makaliwe, H., 1991, *Matematika Kombinatorik*, PT Elex MediaKomputindo, Jakarta.

[17] Slamin, A.C. Prihandoko, T.B Setiawan, F. Rosita, B. Shaleh. 2006. *Vertex-Magic Total Labeling of Disconnected Graphs*.Journal of Prime Research in Mathematics,to appear.

[18] Suryoto, 2001, Automorfisma Graph, *Jurnal Matematika dan Komputer*, No.3,Vol.4, 122-19, Universitas Diponegoro, Semarang.

[19] Wilson, R.J. dan Watkins, J.J., 1990, *Graph: An Introduction Approach: A firstCourse In Discrete Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.