ANALISIS KONKURENSI GARIS YANG MELALUI TITIK SINGGUNG *INCIRCLE*DAN HASIL ROTASI *INCIRCLE* PADA SEGITIGA SAMA SISI

[1]Syarto Musthofa, [2]Nerli Khairani

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan
[2]Dosen Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan

ABSTRAK

Penelitian ini menganalisa konkurensi garis-garis cevian pada segitiga sama sisi dan memberikan analisa lanjutan terhadap hasil yang diperoleh. Pembentukan garis-garis cevian pada segitiga sama sisi dilakukan dengan menggunakan titik singgung incircle terhadap sisi-sisi segitiga tersebut, dan menggunakan titik singgung hasil rotasi 180^o *(dengan sumbu rotasi masing-masing titik sudut segitiga) incircle terhadap perpanjangan sisi segitiga sama sisi tersebut. Setiap tiga garis cevian tertentu yang telah terbentuk akan konkuren di sebuah titik. Dengan menggunakan metode tersebut diperoleh tiga buah titik konkurensi garis-garis cevian di hadapan masing-masing sudut luar segitiga sama sisi. Apabila ketiga titik konkurensi tersebut dihubungkan satu sama lain maka akan terbentuk sebuah segitiga baru yang sebangun dengan segitiga pertama dengan ukuran yang lebih besar. Karena kedua segitiga tersebut sebangun maka setiap sisi yang bersesuaian adalah sebanding. Diperoleh perbandingan sisi segitiga sama sisi pertama dengan segitiga sama sisi kedua adalah* $1 : 4$ *dengan perbandingan luasnya adalah* $1 : 16$. *Sehingga disimpulkan apabila perbandingan jari-jari incircle dengan jari-jari lingkaran penyinggung segitiga sama sisi dari arah sudut luar adalah* $1 : 1$ *maka diperoleh perbandingan luas daerah segitiga sama sisi yang pertama dengan yang kedua adalah* $1 : 16$.

Kata kunci: *Cevian, Incircle, Konkurensi garis*.

ABSTRACT

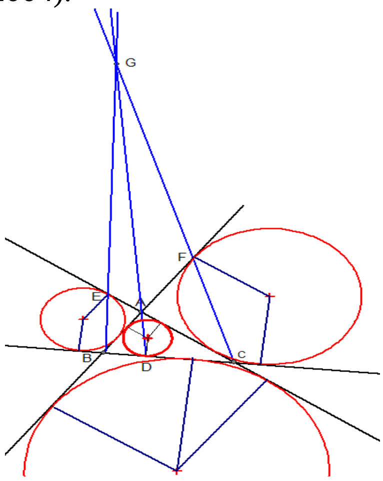
This paper analyze about cevians concurrence of equilateral triangle and then reanalyze the result. Cevians of equilateral triangle constructed by using tangent of incircle to the sides of the triangle, and using tangent of incircle rotate 180^o *(all vertice of the triangle are the pivot of rotation) to the extended of sides of the triangle. Each three certain cevians would be concurrrent in a point. By using this method we got three points the concurrence of cevians outside the triangle. When that concurrence points connected one each other then we got the second triangle which similar with the first equilateral triangle and larger then the first. Since both of the triangle similar, so that every side which in mutual accord would be proportional. The sides proportion of first equilateral triangle with the second equilateral triangle was* $1 : 4$ *and the areas proportion of both of the triangle was* $1 : 16$. *Consequently, when the proportion of radius incircle with radius the tangent circles from outside the angle of first triangle was* $1 : 1$, *then we got the proportion areas of the first triangle with the second triangle was* $1 : 16$.

Keywords: *Cevian, Incircle, Concurrence of lines*.

PENDAHULUAN

Berbicara tentang segitiga, ada beberapa titik istimewa yang terdapat pada sembarang segitiga. Dikatakan istimewa karena titik-titik tersebut terbentuk melalui konkurensi garis-garis yang melalui titik singgung lingkaran pada masing-masing sisi dan atau perpanjangan sisi segitiga tersebut. Yang dimaksud dengan konkurensi garis-garis adalah perpotongan antara tiga garis atau lebih pada satu titik yang sama. Pada segitiga hanya dikhususkan membahas konkurensi tiga garis pada sebuah titik, sehingga dengan kata lain titik istimewa yang dimaksud disini adalah titik yang terbentuk akibat perpotongan tiga garis yang melalui titik singgung lingkaran pada segitiga (Suryani, 2014).

Pembentukan garis-garis yang konkuren dalam suatu segitiga dapat dilakukan dengan memanfaatkan titik-titk singgung lingkaran terhadap segitiga tersebut. Lingkaran penyinggung segitiga (*tritangent circles*) adalah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi dari suatu segitiga ABC. Ada empat lingkaran penyinggung segitiga, yaitu sebuah *incircle* (lingkaran yang mengyinggung dari dalam segitiga) dan tiga buah *excircle* (lingkaran yang menyinggung dari luar segitiga). Dengan memanfaatkan titik singgung lingkaran pada segitiga tersebut maka dapat dibentuk garis-garis yang konkuren pada segitiga (Yiu, 2004).

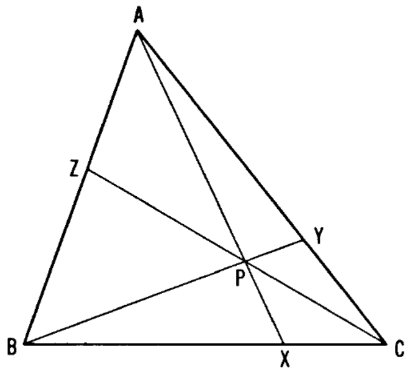


Gambar 1 Titik G Hasil Konkurensi garis BE, AD, dan CF.

Titik singgung lingkaran pada perpanjangan sisi CA adalah titik E. Kemudian titik singgung lingkaran yang lain pada perpanjangan sisi AB adalah titik F. Sedangkan titik singgung lingkaran dalam segitiga (*incircle*) pada sisi BC adalah titik D. Selanjutnya titik sudut A dihubungkan pada titik singgung D, titik sudut B dihubungkan dengan titik singgung E, dan titik sudut C dihubungkan dengan titik singgung F, sehingga terbentuk tiga garis baru yaitu garis AD, BE, dan CF (Ketiga garis tersebut adalah garis-garis *cevian*, yaitu garis yang menghubungkan titik sudut segitiga dengan titik sembarang pada sisi di hadapannya). Keistimewaan dari ketiga garis tersebut adalah apabila diperpanjang kearah yang konvergen maka ketiganya akan konkuren di sebuah titik, katakanlah itu titik G. Sehingga kita dapatkan sebuah titik dihadapan sudut luar A pada segitiga. Apabila dilakukan hal yang sama maka akan diperoleh juga sebuah titik konkurensi dihadapan sudut luar B dan sebuah titik konkurensi dihadapan sudut luar C pada segitiga (Odehnal, 2010).

Untuk membuktikan konkurensi garis pada segitiga dibutuhkan suatu formulasi matematis yang menunjukkan kekonkurenan garis pada segitiga melalui suatu persamaan. Untuk itu akan digunakan Teorema Ceva dalam pembuktiannya.

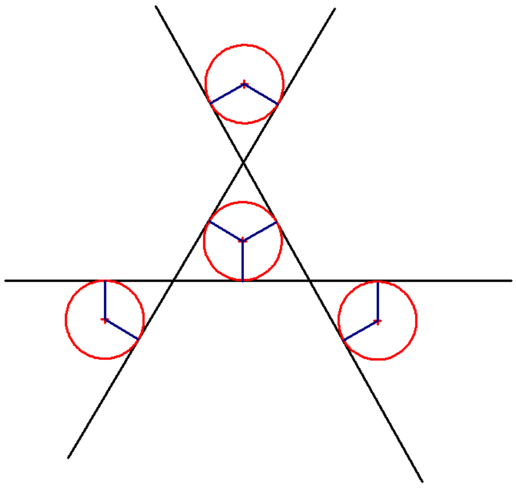
Teorema 1 (Teorema Ceva) : Jika X, Y, dan Z masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA, dan AB pada segitiga ABC. Maka garis *cevian* AX, BY, dan CZ adalah konkuren jika dan hanya jika $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1$ (Coxeter, 1967).



Gambar 2 Garis *cevian* AX, BY, dan CZ konkuren di titik P.

Hasil penelitian sebelumnya telah menyimpulkan bahwa terdapat tiga buah titik semi nagel (titik konkurensi garis *cevians* yang diperoleh dengan menggunakan metode titik singgung *incircle* dan *excircles*) yang berada di luar segitiga (Suryani, 2014).

Metode titik singgung *incircle* dan *excircles* berlaku pada sembarang segitiga dan sudah sering dilakukan untuk mendapatkan konkurensi garis. Oleh karena itu muncul gagasan dari penulis dan tertarik untuk melakukan penelitian dengan menyinggung *incircle* dan hasil rotasi 180^o *incircle* (lingkaran hanya bersinggungan dengan perpanjangan dua sisi) pada suatu segitiga sama sisi untuk mendapatkan konkurensi garis.

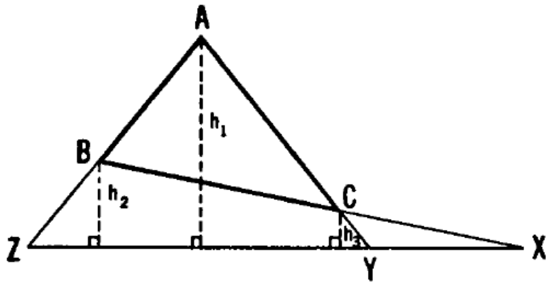


Gambar 3 Masing-masing lingkaran yang berada di luar menyinggung perpanjangan dua sisi segitiga sama sisi.

Lingkaran yang digunakan untuk menyinggung segitiga dari arah sudut luar tersebut adalah *incircle* yang dirotasi 180^o terhadap masing-masing titik sudut. Setelah itu akan dilakukan analisis untuk menunjukkan terjadinya konkurensi garis dengan metode tersebut pada segitiga sama sisi, untuk kemudian dilakukan analisis lanjutan terhadap hasil yang diperoleh (Pembentukan segitiga kedua dan pencarian perbandingan luas segitiga pertama dan kedua).

Dalam pencarian perbandingan luas segitiga pertama dan kedua akan dibutuhkan formulasi yang menunjukkan kolinieritas tiga titik pada sebuah garis pada segitiga. Untuk itu akan dibutuhkan dual dari Teorema Ceva yaitu Teorema Menelaus.

Teorema 2 (Teorema Menelaus) : Titik X, Y, dan Z yang berada pada masing-masing sisi BC, CA, dan AB (termasuk perpanjangannya) pada segitiga ABC adalah kolinier jika dan hanya jika dipenuhi $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1$.



Gambar 4 Titik X, Y, dan Z kolinier di satu garis

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan oleh penulis adalah studi pustaka (penelitian literatur), yaitu dengan mengumpulkan referensi yang dibutuhkan dari berbagai sumber sebagai landasan yang akan digunakan dalam prosedur penelitian.

Prosedur Penelitian

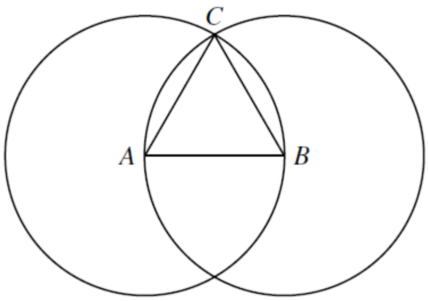
Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan bahan referensi yang dibutuhkan dalam penyelesaian permasalahan penelitian.
2. Melakukan konstruksi segitiga sama sisi ABC dengan memperpanjang sisi-sisinya.
3. Melakukan konstruksi *incircle* pada segitiga tersebut.
4. Merotasi *incircle* tersebut sebesar 180^o terhadap masing-masing titik sudut A, B, dan C pada segitiga sehingga diperoleh tiga hasil rotasi *incircle*.

5. Membentuk tiga buah garis *cevian* pada segitiga yang melalui titik singgung *incircle* dan hasil rotasi *incircle* pada sudut A.
6. Membuktikan bahwa tiga buah garis *cevian* pada segitga yang melalui titik singgung *incircle* dan hasil rotasi *incircle* pada sudut A adalah konkuren.
7. Membentuk tiga buah garis *cevian* pada segitiga yang melalui titik singgung *incircle* dan hasil rotasi *incircle* pada sudut B.
8. Membuktikan bahwa tiga buah garis *cevian* pada segitga yang melalui titik singgung *incircle* dan hasil rotasi *incircle* pada sudut B adalah konkuren.
9. Membentuk tiga buah garis *cevian* pada segitiga yang melalui titik singgung *incircle* dan hasil rotasi *incircle* pada sudut C.
10. Membuktikan bahwa tiga buah garis *cevian* pada segitiga yang melalui titik singgung *incircle* dan hasil rotasi *incircle* pada sudut C adalah konkuren.
11. Setelah diperoleh tiga buah titik konkurensi kemudian dilakukan konstruksi segitiga baru (segitiga kedua) dengan sudut-sudutnya adalah ketiga titik konkurensi tersebut.
12. Menghitung perbandingan luas segitiga sama sisi yang pertama dengan segitiga yang kedua.
13. Mengambil kesimpulan dari hasil penelitian yang dilakukan.

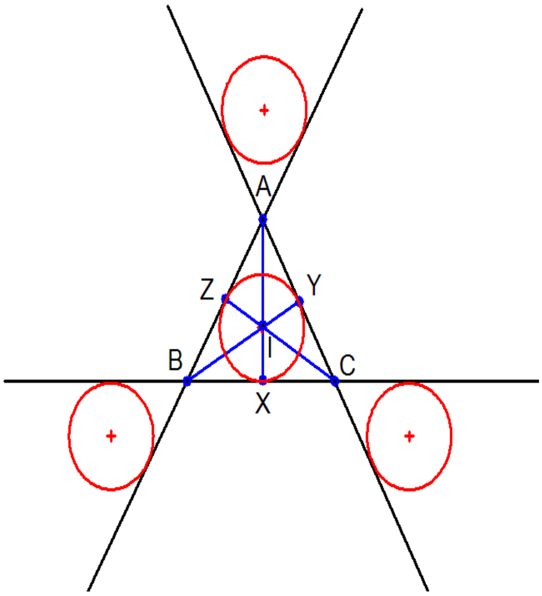
HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk melakukan konstruksi segitiga sama sisi akan digunakan proposisi pertama yang dikemukakan Euclid.



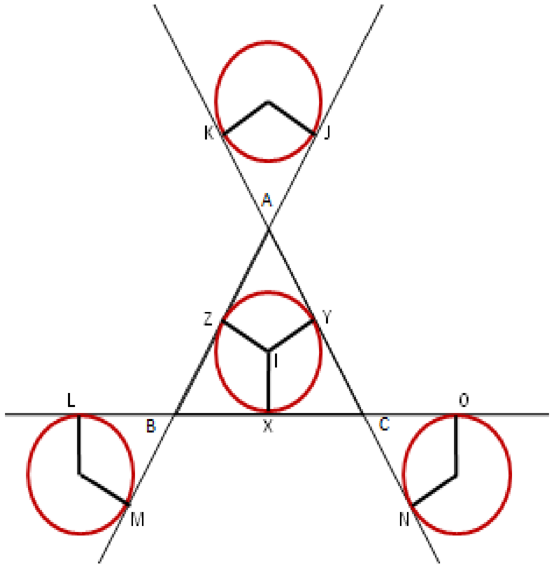
Gambar 5 Cara menggambar segitiga sama sisi

1. Untuk membentuk segitiga sama sisi dengan AB sebagai sisinya, Euclid pertama membuat lingkaran dengan titik A sebagai pusatnya dan AB sebagai jari-jarinya. Demikian juga untuk titik B, dibuat lingkaran dengan titik tersebut sebagai pusatnya dan AB sebagai jari-jarinya. Titik C digunakan untuk menunjukkan sebuah titik perpotongan kedua lingkaran tersebut. Dari kedua titik yang ada, ditarik sebuah garis dari titik A ke titik C, demikian juga dari titik B ke titik C sehingga terbentuk sebuah segitiga ABC. Karena titik C berada pada lingkaran A, maka AC = AB karena keduanya merupakan jari-jari lingkaran A. Kemudian karena titik C juga pada lingkaran B, maka BC = AB karena keduanya merupakan jari-jari lingkaran B. Karena AB = AC dan juga AB = BC maka AC = BC. Akibatnya AB = AC = BC , sehingga segitiga ABC merupakan segitiga sama sisi (Fauzi, 2013).
2. Ketiga sisi segitiga tersebut diperpanjang kemudian dikonstruksi suatu incircle pada segitiga tersebut.



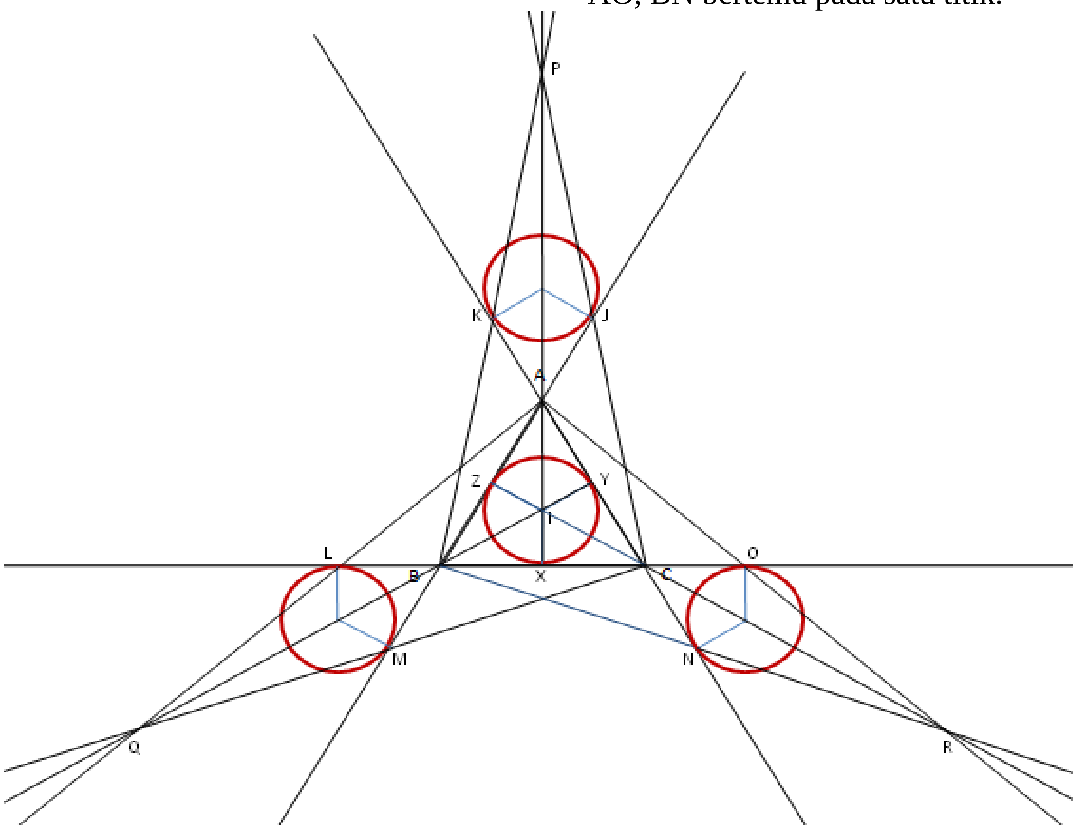
Gambar 6 Hasil konstruksi *incircle*

3. *Incircle* yang diperoleh tersebut dirotasi sebesar 180^o terhadap masing-masing titik sudut A, B, dan C sehingga diperoleh tiga buah hasil rotasi incircle di hadapan masing-masing sudut segitiga sama sisi ABC.



Gambar 7 Tiga hasil rotasi *incircle*.

4. Dari Gambar 7 diatas dapat dibentuk garis-garis *cevian* AX, BK, CJ, BY, CM, AL, CZ, AO, dan BN. Kemudian pada Gambar 8 berikut dapat dilihat bahwa AX, BK, CJ bertemu pada satu titik, kemudian BY, CM, AL bertemu pada satu titik, dan selanjutnya CZ, AO, BN bertemu pada satu titik.



Gambar 8 Konkurensi garis-garis pada segitiga.

5. Untuk pembuktian konkurensi garis AX, BK, dan CJ akan dilakukan berikut ini.

Diketahui bahwa segitiga ABC adalah segitiga sama sisi sehingga diperoleh persamaan

$AB = BC = CA$ (1)

Kemudian karena AX, BY, dan CZ membagi dua sama besar berturut pada sisi BC, CA, dan AB maka diperoleh persamaan

$AZ = ZB = BX = XC = CY = YA$ (2)

Karena sudut KAJ dan Sudut ZAY sama besar dan disinggung dengan lingkaran yang berjari-jari sama maka diperoleh

$YA = ZA = KA = AJ$ (3)

Sesuai dengan Teorema Ceva maka harus dipenuhi persamaan berikut

X, K, dan J masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA, dan AB maka AX, BK, dan CJ konkuren jika dipenuhi $\frac{BX}{XC}\frac{CK}{KA}\frac{AJ}{JB} = 1$.

Bukti :

Dari (2) diketahui $BX = XC$ maka

$\frac{BX}{XC} = 1$ (4)

Kemudian diperoleh

$\frac{AJ}{KA} = 1$ (5)

dan

$\frac{CK}{JB} = 1$ (6)

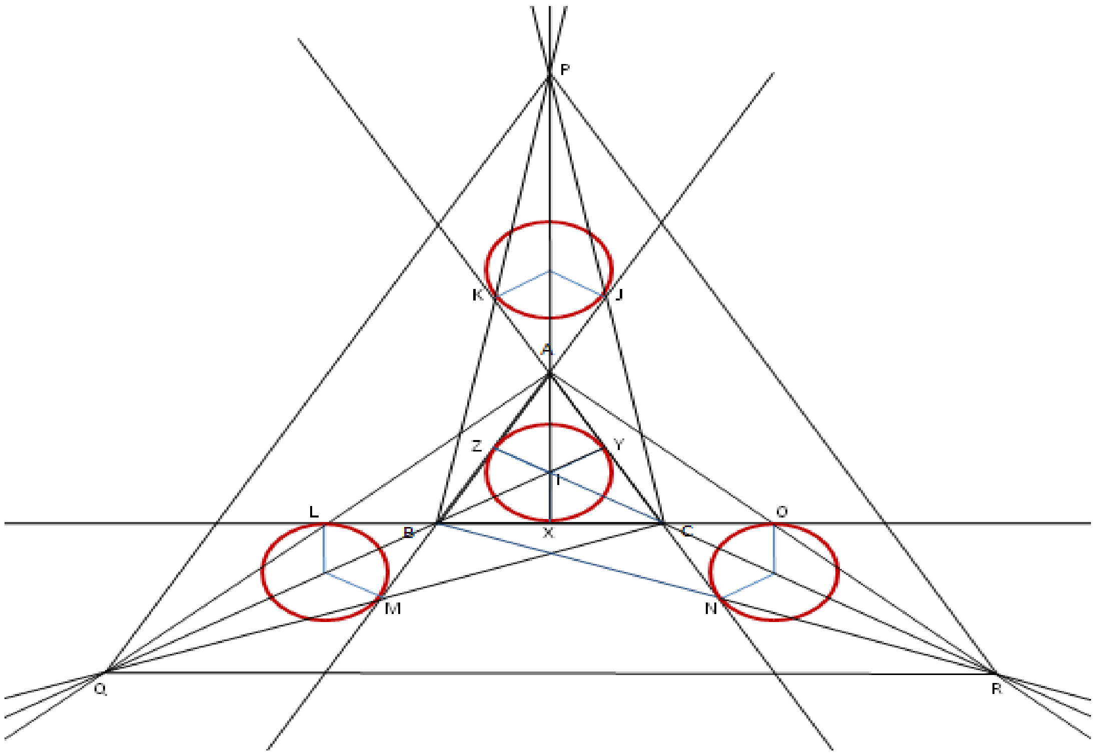
Kemudian dari (4), (5) dan (6) diperoleh bahwa

$$\frac{BX}{XC}\frac{AJ}{KA}\frac{CK}{JB} = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 = 1$$

Karena diketahui bahwa $\frac{BX}{XC}\frac{CK}{KA}\frac{AJ}{JB} = \frac{BX}{XC}\frac{AJ}{KA}\frac{CK}{JB}$ maka terbukti bahwa garis AX, BK dan CJ adalah konkuren.

Dengan melakukan cara yang sama dapat dibuktikan konkurensi garis BY, CM, dan AL serta garis CZ, AO, dan BN.

Setelah diperoleh tiga buah titik hasil konkurensi garis maka dapat dikonstruksi sebuah segitiga baru (segitiga yang kedua) yang sebangun dengan segitiga pertama.



Gambar 9 Segitiga ABC dan segitiga PQR

6. Segitiga yang kedua tersebut diberi identitas dengan nama segitiga PQR. Karena segitiga ABC sebangun dengan segitiga PQR maka sisi-sisi yang bersesuaian diantara keduanya adalah sebanding.

Untuk mencari perbandingan sisi diantara keduanya dilakukan langkah berikut ini.

Berdasarkan gambar diasumsikan bahwa panjang IB = 2IX sehingga diperoleh persamaan asumsi

$IB = 2IX$ (7)

Langkah selanjutnya menggunakan segmen garis BC untuk mengetahui apakah B tetap kolinier dengan titik C dan X jika jarak IB dianggap sama dengan $2IX$.

Untuk membuktikan bahwa titik B kolinier dengan titik C dan X maka digunakan teorema Menelaus yang telah dijelaskan sebelumnya.

Titik B, C, dan X yang masing-masing berada pada sisi IY, YA, dan AI pada segitiga IYA adalah kolinier (segaris) jika dipenuhi persamaan $\frac{IB}{BY}\frac{YC}{CA}\frac{AX}{XI} = 1$

Bukti :

Dari persamaan (7) diketahui $IB = 2IX$

Dari gambar diketahui bahwa

$BY = IB + IY$ (8)

Dapat dilihat bahwa $IX = IY = IZ$ karena merupakan jari-jari lingkaran sehingga persamaan (8) menjadi

$BY = IB + IX$ (9)

Persamaan (7) disubstitusi ke (9) menjadi

$BY = 2IX + IX = 3IX$ (10)

Dari gambar dapat dilihat bahwa

$CA = YC + YA$ (11)

Karena $YC = YA$ maka persamaan (11) dapat menjadi

$CA = YC + YC = 2YC$ (12)

Dari gambar dapat diketahui bahwa

$AX = IA + IX$ (13)

Persamaan (6) disubstitusi ke persamaan (13) menjadi

$AX = IB + IX$ (14)

Kemudian persamaan (7) disubstitusikan ke persamaan (14)

$AX = 2IX + IX = 3IX$ (15)

Selanjutnya persamaan (7), (10), (12), dan (15) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{IB}{BY}\frac{YC}{CA}\frac{AX}{XI} = \frac{2IX}{3IX}\frac{YC}{2YC}\frac{3IX}{IX} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1} = 1$$

Terbukti bahwa $\frac{IB}{BY}\frac{YC}{CA}\frac{AX}{XI} = 1$. Dengan begitu titik B tetap kolinier dengan titik C dan X jika $IB = 2IX$ sehingga asumsi pada persamaan (7) terbukti benar.

Selanjutnya diasumsikan panjang segmen garis IQ adalah 8 kali panjang IX.

$IQ = 8IX$ (16)

Langkah selanjutnya adalah kembali menggunakan garis cevian AL untuk mengetahui apakah Q tetap kolinier dengan titik A dan L jika asumsi (16) digunakan.

Untuk membuktikan bahwa titik Q tetap kolinier dengan titik A dan L saat disumsikan $IQ = 8IX$ maka digunakan teorema Menelaus yang telah dijelaskan sebelumnya.

Titik Q, L, dan A yang masing-masing berada pada sisi IB, BX, XI pada segitiga IBX adalah kolinier (segaris) jika dipenuhi persamaan $\frac{IQ}{QB}\frac{BL}{LX}\frac{XA}{AI} = 1$

Bukti :

Karena titik L dan X merupakan titik singgung lingkaran dengan jari-jari yang sama pada sudut yang sama besar maka diketahui

$BL = BX$ (17)

Dari gambar diketahui bahwa

$LX = BL + BX$ (18)

Persamaan (17) disubstitusi ke persamaan (18) menjadi

$LX = BL + BL = 2BL$ (19)

Dari gambar diketahui bahwa

$IQ = IB + QB$ (20)

Kemudian persamaan (7) dan persamaan (16) disubstitusikan ke persamaan (20)

$8IX = 2IX + QB$ (21)

Persamaan (21) menjadi
$QB = 8IX - 2IX = 6IX$ (22)

Selanjutnya persamaan (6), (7), (15), (16), (19), dan (22) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{IQ}{QB}\frac{BL}{LX}\frac{XA}{AI} = \frac{8IX}{6IX}\frac{BL}{2BL}\frac{3IX}{IB} = \frac{8IX}{6IX}\ \frac{BL}{2BL}\ \frac{3IX}{2IX} = \frac{8}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1} = 1$$

Terbukti bahwa $\frac{IQ}{QB}\frac{BL}{LX}\frac{XA}{AI} = 1$. Dengan begitu titik Q tetap kolinier dengan titik L dan A jika $IQ = 8IX$ sehingga asumsi pada persamaan (16) terbukti benar.

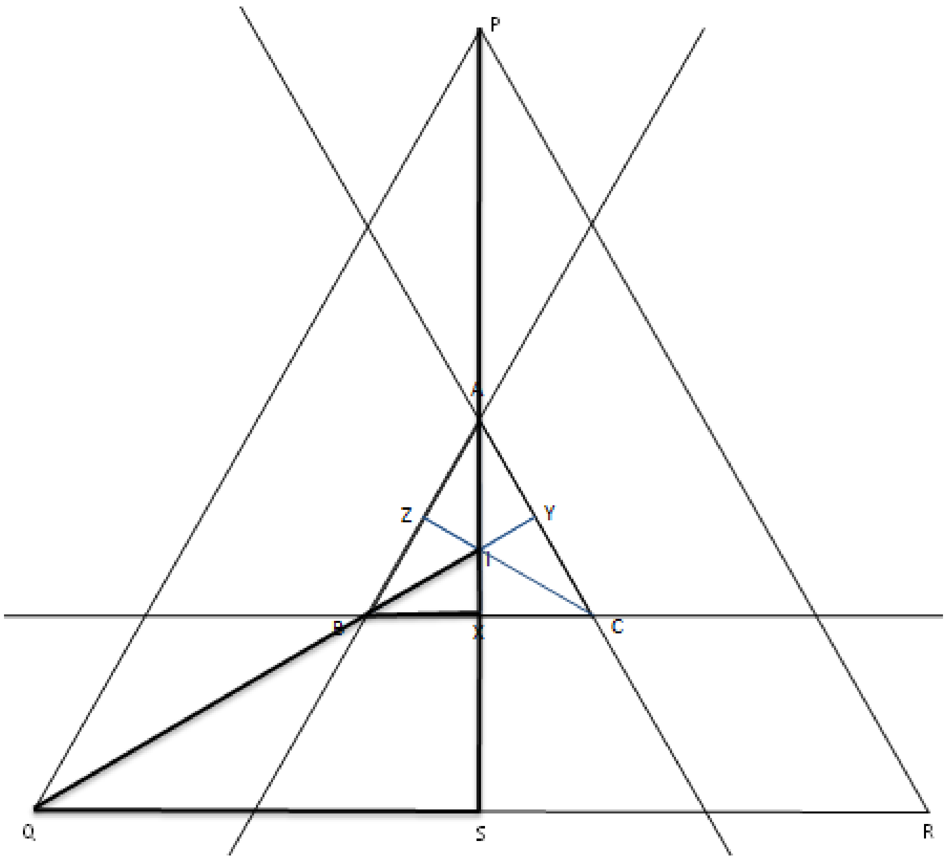
Apabila diperhatikan segitiga ABC dan segitiga PQR dapat dilihat bahwa IB bersesuaian dengan IQ sehingga diketahui bahwa $IB{:}\,IQ$ adalah perbandingan semua sisi yang berseuaian antara segitiga ABC dengan segitiga PQR.

Dari persamaan (7) dan (16) maka diperoleh
$IB{:}\,IQ = 2IX : 8IX = 1 : 4$ (23)

Dari persamaan (23) diketahui bahwa perbandingan sisi yang bersesuaian pada segitiga ABC dan PQR adalah 1 : 4.

Selanjutnya ditarik sebuah garis dari titik P ke suatu titik S sehingga PS tegak lurus dengan QR. Kemudian karena AX pada segitiga ABC bersesuaian dengan PS pada segitiga PQR maka
$AX{:}\,PS = 1{:}\,4 = AX{:}\,4AX$ (24)
sehingga
$PS = 4AX$ (25)

Dan karena BC pada segitiga ABC bersesuaian dengan QR pada segitiga PQR maka
$BC{:}\,QR = 1{:}\,4 = BC{:}\,4BC$ (26)
sehingga
$QR = 4BC$ (27)



Gambar 10 Perbandingan sisi yang bersesuaian pada segitiga ABC dan PQR adalah 1 : 4

Sesuai dengan rumus luas segitiga bahwa $L = \frac{1}{2}at$ dengan L adalah luas, a adalah alas, t adalah tinggi maka luas segitiga ABC adalah

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} BC \,.\, AX \qquad (28)$$

Sedangkan luas segitiga PQR adalah

$$\text{Luas } \Delta PQR = \frac{1}{2} QR \,.\, PS \qquad (29)$$

Kemudian persamaan (25) dan (27) disubstitusikan ke persamaan (29) sehingga

$$\begin{aligned}\text{Luas } \Delta PQR &= \frac{1}{2}\big(4(BC) \,.\, 4(AX)\big)\\ &= 16\left(\frac{1}{2}(BC) \,.\, (AX)\right) \qquad (30)\end{aligned}$$

Sehingga dapat dibandingkan luas segitiga ABC dengan luas segitiga PQR dari persamaan (28) dan (30) yaitu

$$\begin{aligned}&\text{Luas } \Delta ABC : \text{Luas } \Delta PQR\\ &= \left(\frac{1}{2}(BC) \,.\, (AX)\right) : 16\left(\frac{1}{2}(BC) \,.\, (AX)\right)\\ &= 1 : 16 \qquad (31)\end{aligned}$$

Pada persamaan (31) tersebut telah ditunjukkan perbandingan luas daerah segitiga ABC dengan luas daerah segitiga PQR adalah $1 : 16$. Pembentukan segitiga PQR tersebut diperoleh dengan menggunakan titik konkurensi garis *cevian* yang memanfaatkan titik singgung *incircle* dan hasil rotasi *incircle* sebesar 180^{o}. Penggunaan metode rotasi *incircle* menjamin bahwa lingkaran penyinggung luar segitiga sama sisi tersebut memiliki jari-jari yang sama dengan *incircle*, karena rotasi hanya menyebabkan perpindahan posisi tetapi tidak menyebabkan perubahan bentuk dan ukuran. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa perbandingan jari-jari lingkaran penyinggung dalam segitiga (*incircle*) dan lingkaran penyinggung luar (hasil rotasi *incircle*) adalah $1 : 1$.

Penjelasan diatas dapat disederhanakan dengan mengatakan bahwa apabila perbandingan *incircle* dan lingkaran penyinggung luar dari arah sudutnya adalah $1 : 1$ maka perbandingan luas segitiga sama sisi pertama dengan segitiga sama sisi kedua adalah $1 : 16$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

1. Segitiga sama sisi memiliki keistimewaan dalam hal konkurensi garis-garis yang melalui titik singgung lingkaran. Metode yang biasanya digunakan untuk mendapatkan konkurensi garis *cevian* pada segitiga adalah menggunakan *incircle* atau *excircles*. Tetapi pada segitiga sama sisi konkurensi garis-garis *cevian* tetap dapat dibentuk menggunakan pendekatan *incircle* dan hasil rotasi *incircle* sebesar 180^{o} pada masing-masing titik sudut segitiga.
2. Dengan pendekatan *incircle* dan hasil rotasi *incircle* tersebut diperoleh tiga titik hasil konkurensi garis-garis *cevian* di hadapan masing-masing sudut luar segitiga. Kemudian ketiga titik tersebut dihubungkan satu sama lain sehingga terbentuk segitiga kedua yang sebangun dengan segitiga pertama.
3. Perbandingan *incircle* dan lingkaran penyinggung luar dari arah sudutnya adalah $1 : 1$. Hal tersebut menyebabkan perbandingan sisi antara segitiga pertama dan segitiga kedua adalah $1 : 4$, kemudian perbandingan luas daerah keduanya menjadi $1 : 16$.

Saran

1. Penulis mengasumsikan bahwa dengan menggunakan metode yang sama pada penelitian ini masih terdapat titik konkurensi dari garis-garis *cevian* selain dari yang telah dibuktikan penulis. Misalnya apabila diperhatikan *cevian* AL, BK, dan CZ berdasarkan gambar dapat diasumsikan ketiganya konkuren di satu titik. Sehingga penulis menyarankan untuk membuktikan asumsi tersebut.
2. Dengan menggunakan pendekatan yang sama dengan penelitian ini

konkurensi garis-garis *cevian* pada segitiga sama sisi dapat terbentuk sebanyak tak hingga titik pada selang tertentu pada masing-masing perpanjangan *cevian* AX, BY, dan CZ. Disarankan untuk mencari panjang selang yang memungkinkan terbentuknya konkurensi garis tersebut dan membuktikannya.

3. Penelitian ini menggunakan pendekatan lingkaran dari arah sudut luar segitiga sama sisi, dimana jari-jari lingkaran yang digunakan adalah sama dengan jari-jari *incircle*. Bagi pembaca yang tertarik untuk melakukan penelitian lebih lanjut bisa menggunakan pendekatan lingkaran dari arah sudut luar segitiga sama sisi dengan jari-jari lingkaran penyinggungnya adalah setengah jari-jari *incircle*, kemudian seperempat jari-jari *incircle* dan seterusnya apabila diperlukan.
4. Saran pada poin 3 diatas dapat diperdalam dengan melakukan generalisir metode yang dikemukakan penulis, yakni penelitian tentang bagaimana pengaruh perbandingan jari-jari *incircle* dengan jari-jari lingkaran penyinggung luar terhadap perbandingan luas daerah segitiga sama sisi yang pertama dengan yang kedua.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bradley, Christopher J., (2005), *Challenges in Geometry For Mathematical Olympians Past and Present*, Oxford University Press, New York.

[2] Coxeter, H. S. M dan S. L Greitzer, (1967), *Geometry Revisited*, The Mathematical Assosiation of America (Inc), Washington D. C.

[3] Cummins, J., Tim Kanold, Margaret Kenney, Carol Malloy, & Yvonne Mojica, (2001), *Geometry Concepts and Applications Study Guide Workbook*, McGraw Hill, New York.

[4] Fauzi, K.M.A., (2013), *Mengenal Geometri Euclid dan Non-Euclid Lebih Dekat*, Unimed Press, Medan.

[5] Greenberg, Marvin Jay., (1993), *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History – Third Edition*, W. H Freeman and Company, San Fransisco.

[6] Odehnal, B., (2009), Generalized Gergonne and Nagel Points, *Beitr Algebra Geom*, **Vol. 51 No. 2**, Hal. 477 - 491.

[7] Rich, Barnett dan Christopher Thomas., (2009), *Schaum's Outline Geometry*, McGraw Hill, New York.

[8] Stillwell, John., (2005), *The Four Pillars of Geometry*, Springer, San Fransisco.

[9] Suryani, Indah; Mashadi & M. Natsir., (2014), Alternatif Konstruksi Titik Nagel, *JOM FMIPA UNRI*, **Vol.1 No. 2**, Hal. 1 – 10.

[10] Yiu, Paul., (2004), A Tour of Triangle Geometry, *The 37th Annual Meeting of the Florida Section of the Mathematical Association of America*, Departement of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University, Orlando, Hal. 1 -52