KARISMATIKA – ISSN : 2443 – 0366
TAHUN 2 VOL.2 NO. 1 APRIL 2016

# TITIK GERGONNE PADA SEGIEMPAT SIKLIK

Hesy Herlinawati [1*], Mashadi [2], Hasriati [2]

[1] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya 28293 Indonesia
[*]hesy_herlinawati@ymail.com

## ABSTRAK

*Titik gergonne pada umumnya diberlakukan pada sebarang segitiga yang terdiri dari dua bentuk, yaitu satu buah titik gergonne dalam dan tiga buah titik gergonne luar. Pada tulisan ini akan dibahas cara mengkontruksi titik gergonne pada sebarang segiempat Siklik serta beberapa perhitungan panjang sisi-sisi yang terbentuk dari pengkontruksian lingkaran singgung luar tersebut.*

**Kata Kunci** : *Lingkaran Singgung Luar, Segiempat Siklik, Titik Gergonne.*

## ABSTRACT

*Gergonne point generally imposed on any triangle consisting of two forms, namely a single point Gergonne inside and three points Gergonne outside. In this paper discuss how to construct a point Gergonne at any cyclic quadrilateral as well as some calculation long of sides formed from contructing outside the circle tangent.*

**Key Word** : *outside the circle tangent,, cyclic quadrilateral, Gergonne point*

## PENDAHULUAN

Misalkan terdapat sebarang segitiga dengan lingkaran yang berada di dalamnya, lingkaran yang menyinggung ketiga sisi nya yang berpusat pada titik pusat lingkaran dalam (*incenter*)[3, 7, 9], sehingga terdapat tiga titik singgung terhadap segitiga, yang mana apabila ditarik garis dari ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung lingkaran dalam terhadap sisi segitiga tersebut maka ketiga garis tersebut akan berpotongan disatu titik (*concurrent*) yang disebut titik gergonne [2, 4, 5].

Konsep terbentuknya titik gergonne adalah berasal dari *incercle*. Selanjutnya jika terdapat lingkaran singgung luar segitiga (*excircle*) dengan titik pusat lingkaran singgung luar segitiga (*excenter*) juga dapat dibentuk titik gergonne diluar segitiga yang berasal dari lingkaran singgung luar segitiga. Pembuktian konkurensi titik Gergonne biasanya digunakan pada sebarang segitiga. Pada artikel ini dibahas konkurensi titik Gergonne pada segiempat siklik.

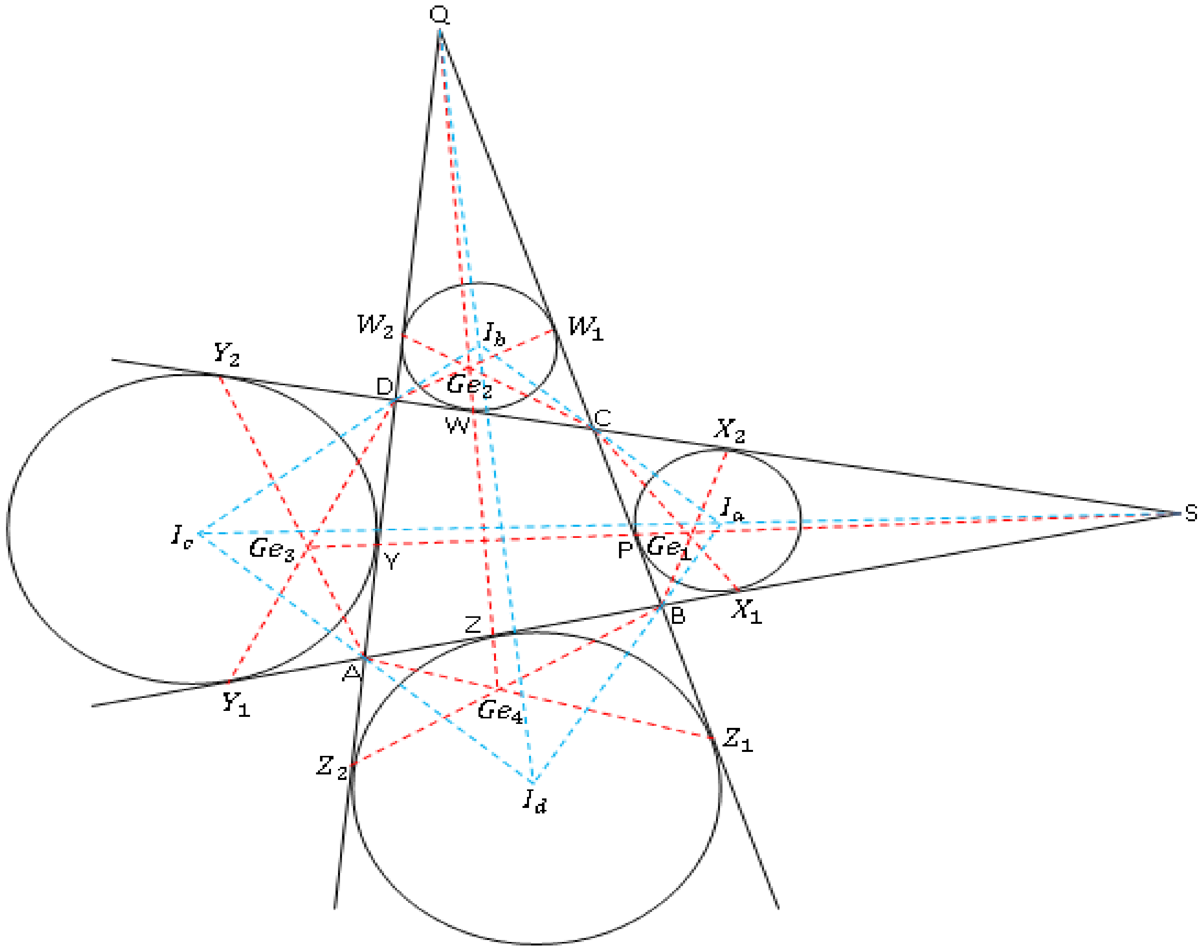
Pada segiempat siklik *ABCD*, terdapat empat buah lingkaran singgung luarnya. Yaitu lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_a$, lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_b$, lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_c$ dan lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_d$. Masing-masing bersinggungan dengan salah satu sisi segiempat. Lingkaran singgung luar segiempat adalah lingkaran yang menyinggung sisi luar pada salah satu sisi segiempat dan perpanjangan dua sisi lainnya

Pada segiempat siklik *ABCD*, lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_a$ didapat dari perpanjangan sisi $AB$ dan perpanjangan sisi $DC$ yang bertemu di titik $S$. Garis bagi pada sudut luar segiempat (*external bisector*) yaitu $\angle C$ dan $\angle B$ serta garis bagi pada $\angle S$ akan berpotongan disatu titik, yang merupakan pusat lingkaran luar yaitu $I_a$. Begitu juga untuk lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_b$, lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_c$ dan ingkaran singgung luar yang berpusat di $I_d$.

## PEMBAHASAN

### MENGKONTRUKSI TITIK GERGONNE

Disini akan dibahas mengenai mengkontruksi titik gergonne. Perhatikan gambar 1, misalkan sebarang segiempat siklik, dengan perpanjangan masing-masing sisi disetiap sisi segiempat dibentuk lingkaran singgung luar (*excircle*). Sehingga masing-masing lingkaran menyinggung di titik $P, W, Y$ dan $Z$. Hubungkan tiap sudut ke titik singgung di hadapannya, maka ketiga garis tersebut akan konkuren dan konkurensi ini yang disebut dengan titik gergonne
.




**Gambar 1. Segiempat *ABCD* mempunyai empat Titik Gergonne**

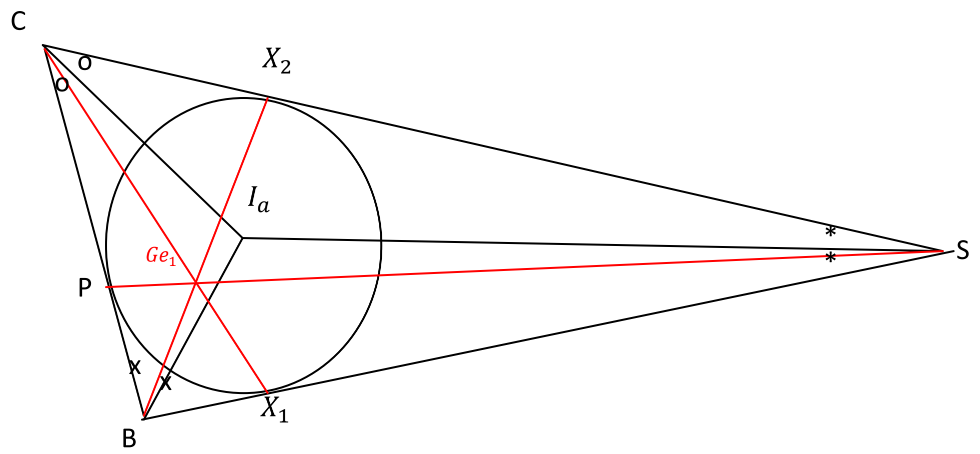
**KONKURENSI TITIK GERGONNE**

Konkurensi titik gergonne dapat dibuktikan dengan berbagai cara. Dalam artikel ini akan dibuktikan dengan teorema ceva [1, 7, 10]. Pada gambar 1, titik gergonne dapat dilihat menjadi dua bentuk. Yaitu titik gergonne dalam pada segitiga dan titik gergonne luar pada segitiga. Untuk titik gergonne dalam pada segitiga dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva kasus I (konkurensi titik berada di dalam segitiga).

**Teorema 1 (Teorema Gergonne Dalam)** Di dalam segitiga garis yang dibentuk dari titik-titik puncak $\Delta\, BCS$ yang dihubungkan dengan titik singgung lingkaran dalam pada sisi di hadapannya adalah konkuren.

Dari gambar 2, pandang $\Delta\, BCS$, akan ditunjukkan $PS$, $CX_1$ dan $BX_2$ konkuren di $Ge_1$ jika dan hanya jika :

$$\frac{BX_1}{X_1S}\cdot\frac{SX_2}{X_2C}\cdot\frac{CP}{PB}=1 \qquad \dots(1)$$




**Gambar 2. Titik Gergonne dalam $\Delta\, BCS$**

($\Rightarrow$) Misalkan ketiga garis $PS$, $CX_1$ dan $BX_2$ konkuren di $Ge_1$, akan ditunjukkan persamaan (1) berlaku. Pada gambar 2, perhatikan $\Delta\, BCX_1$ dan $\Delta\, CX_1S$ dengan masing-masing alasnya $BX_1$ dan $X_1S$.

$$\frac{BX_1}{X_1S}=\frac{L\Delta\, BCX_1}{L\Delta\, CX_1S}=\frac{L\Delta\, BGe_1X_1}{L\Delta\, Ge_1X_1S}$$

$$=\frac{L\Delta\, BCX_1-L\Delta\, BGe_1X_1}{L\Delta\, CX_1S-\ L\Delta\, Ge_1X_1S}$$

$$=\frac{L\Delta\, BCGe_1}{L\Delta\, CGe_1S}$$

Perhatikan $\Delta\, BX_2S$ dan $\Delta\, BCX_2$ dengan masing-masing alasnya $SX_2$ dan $CX_2$.

$$\frac{SX_2}{CX_2}=\frac{L\Delta\, BX_2S}{L\Delta\, BCX_2}=\frac{L\Delta\, Ge_1X_2S}{L\Delta\, CGe_1X_2}$$

$$=\frac{L\Delta\, BX_2S-\ L\Delta\, Ge_1X_2S}{L\Delta\, BCX_2-\ L\Delta\, CGe_1X_2}$$

$$=\frac{L\Delta\, BGe_1S}{L\Delta\, BCGe_1}$$

Perhatikan $\Delta\, CPS$ dan $\Delta\, BPS$ dengan masing-masing alasnya $CP$ dan $BP$.

$$\frac{CP}{BP} = \frac{L\Delta\, CPS}{L\Delta\, BPS} = \frac{L\Delta\, CPGe_1}{L\Delta\, BGe_1P}$$
$$= \frac{L\Delta\, CPS - L\Delta\, CPGe_1}{L\Delta\, BPS - L\Delta\, BGe_1P}$$
$$= \frac{L\Delta\, CGe_1S}{L\Delta\, BGe_1S}$$

Sehingga

$$\frac{BX_1}{X_1S} \cdot \frac{SX_2}{X_2C} \cdot \frac{CP}{PB}$$
$$= \frac{L\Delta\, BCGe_1}{L\Delta\, CGe_1S} \cdot \frac{L\Delta\, BGe_1S}{L\Delta\, BCGe_1} \cdot \frac{L\Delta\, CGe_1S}{L\Delta\, BGe_1S}$$
$$= 1$$

($\Leftarrow$) untuk membuktikan sebaliknya, jika diketahui persamaan (1), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis $PS$, $CX_1$ dan $BX_2$ konkuren. Untuk itu misalkan $BX_2$ dan $SP$ berpotongan dititik $Ge_1$, selanjutnya buat garis $CGe_1$ dan perpanjang sehingga memotong garis $BS$, katakan titik potongnya adalah $X_1{}'$, berdasarkan hipotesis maka berlaku :

$$\frac{BX_1{}'}{X_1{}'S} \cdot \frac{SX_2}{X_2C} \cdot \frac{CP}{PB} = 1$$
$$\frac{BX_1{}'}{X_1{}'S} = \frac{X_2C}{SX_2} \cdot \frac{PB}{CP}$$
$$\frac{BX_1{}'}{X_1{}'S} = \frac{L\Delta\, BCGe_1}{L\Delta\, SGe_1X_1} \cdot \frac{L\Delta\, SGe_1X_1}{L\Delta\, CGe_1S}$$
$$\frac{BX_1{}'}{X_1{}'S} = \frac{L\Delta\, BCGe_1}{L\Delta\, CGe_1S}$$
$$\frac{BX_1{}'}{X_1{}'S} = \frac{BX_1}{X_1S}$$

karena $X_1' = X_1$ dan hanya ada satu garis yang merupakan perpanjangan dari titik sudut $C$ yang memotong garis $BX_2$ dan $SP$ tepat di $Ge_1$ yaitu garis $CX_1$. Jadi garis $PS$, $CX_1$ dan $BX_2$ konkuren di $Ge_1$. ∎

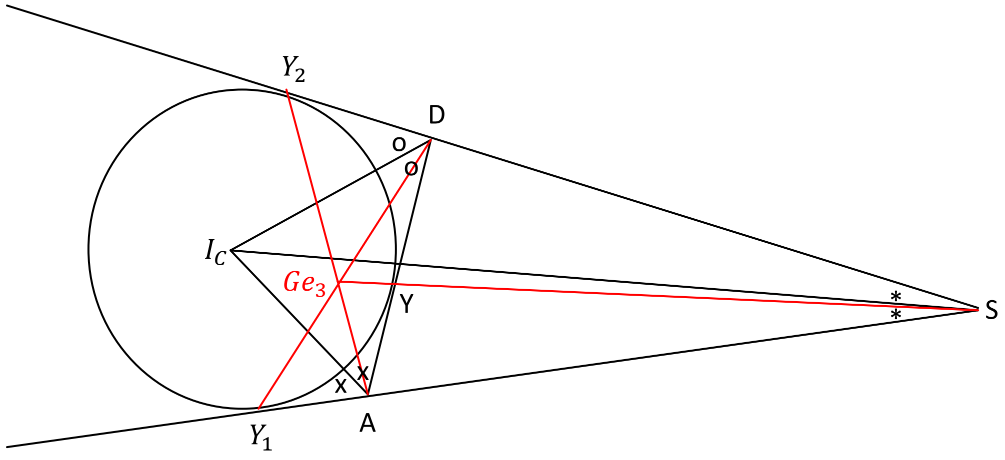
Dengan menggunakan cara yang sama akan berlaku terhadap pembuktian konkurensi dari $Ge_2$ (lihat gambar 1).

Selanjutnya jika terdapat lingkaran singgung luar segitiga (*excircle*) dengan titik pusat lingkaran singgung luar segitiga (*excenter*) juga dapat dibentuk titik gergonne diluar segitiga yang berasal dari lingkaran singgung luar segitiga. Konkurensi titik gergonne luar pada segitiga dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva kasus 2 (konkurensi titik berada di luar segitiga).

**Teorema 2. (Teorema Gergonne Luar)** Pada segitiga $\Delta\, ADS$ garis yang dibentuk dari titik-titik singgung lingkaran luar segitiga $\Delta\, ADS$ terhadap sudut segitiga dihadapannya maka ketiga garis tersebut adalah konkuren.

Dari gambar 1, pandang $\Delta\, ADS$, akan ditunjukkan $SGe_3$, $DY_1$ dan $AY_2$ konkuren di $Ge_3$ jika dan hanya jika :

$$\frac{DY}{AY} \cdot \frac{AY_1}{Y_1S} \cdot \frac{SY_2}{Y_2D} = 1 \qquad \ldots(2)$$




**Gambar 3. Titik Gergonne luar $\Delta\, ADS$**

(⇒) Misalkan ketiga garis $SGe_3$, $DY_1$ dan $AY_2$ konkuren di $Ge_3$ , akan ditunjukkan persamaan (2) berlaku. Pada gambar 3, perhatikan $\Delta\, DSY$ dan $\Delta\, ASY$ dengan masing-masing alasnya $DY$ dan $AY$.

$$\frac{DY}{AY} = \frac{L\Delta\, DSY}{L\Delta\, ASY} = \frac{L\Delta\, DGe_3Y}{L\Delta\, AGe_3Y}$$
$$= \frac{L\Delta\ DSY + L\Delta\, DGe_3Y_2}{L\Delta\, ASY + L\Delta\, AGe_3Y}$$
$$= \frac{L\Delta\, DGe_3S}{L\Delta\, AGe_3S}$$

Perhatikan $\Delta\, ADY_1$ dan $\Delta\, DY_1S$ dengan masing-masing alasnya $AY_1$ dan $Y_1S$.

$$\frac{AY_1}{Y_1S} = \frac{L\Delta\, ADY_1}{L\Delta\, ADS} = \frac{L\Delta\, DY_1S}{L\Delta\, Ge_3Y_1S}$$
$$= \frac{L\Delta\, ADY_1 - L\Delta\, DY_1S}{L\Delta\, ADS - L\Delta\, Ge_3Y_1S}$$
$$= \frac{L\Delta\, ADGe_3}{L\Delta\, DGe_3S}$$

Perhatikan $\Delta\, ASY_2$ dan $\Delta\, ADY_2$ dengan masing-masing alasnya $SY_2$dan $DY_2$.

$$\frac{SY_2}{DY_2} = \frac{L\Delta\, ASY_2}{L\Delta\, ADY_2} = \frac{L\Delta\, Ge_3SY_2}{L\Delta\, DGe_3Y_2}$$
$$= \frac{L\Delta\, ASY_2 - L\Delta\, Ge_3SY_2}{L\Delta\, ADY_2 - L\Delta\, DGe_3Y_2}$$
$$= \frac{L\Delta\, AGe_3S}{L\Delta\, ADGe_3}$$

Sehingga

$$\frac{DY}{AY} \cdot \frac{AY_1}{Y_1S} \cdot \frac{SY_2}{Y_2D}$$
$$= \frac{L\Delta\, DGe_3S}{L\Delta\, AGe_3S} \cdot \frac{L\Delta\, ADGe_3}{L\Delta\, DGe_3S} \cdot \frac{L\Delta\, AGe_3S}{L\Delta\, ADGe_3}$$
$$= 1$$

(⇐) untuk membuktikan sebaliknya, jika diketahui persamaan (2), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis $SGe_3$, $DY_1$ dan $AY_2$ konkuren. Untuk itu misalkan $SGe_3$ dan $AD$ berpotongan dititik $Y'$, berdasarkan hipotesis maka berlaku:

$$\frac{DY'}{AY'} \cdot \frac{AY_1}{Y_1S} \cdot \frac{SY_2}{Y_2D} = 1$$
$$\frac{DY'}{AY'} = \frac{Y_1S}{AY_1} \cdot \frac{Y_2D}{SY_2}$$
$$\frac{DY'}{AY'} = \frac{L\Delta\, DGe_3S}{L\Delta\, ADGe_3} \cdot \frac{L\Delta\, ADGe_3}{L\Delta\ AGe_3S}$$
$$\frac{DY'}{AY'} = \frac{L\Delta\, DGe_3S}{L\Delta\ AGe_3S}$$

$$\frac{DY'}{AY'} = \frac{DY}{AY}$$

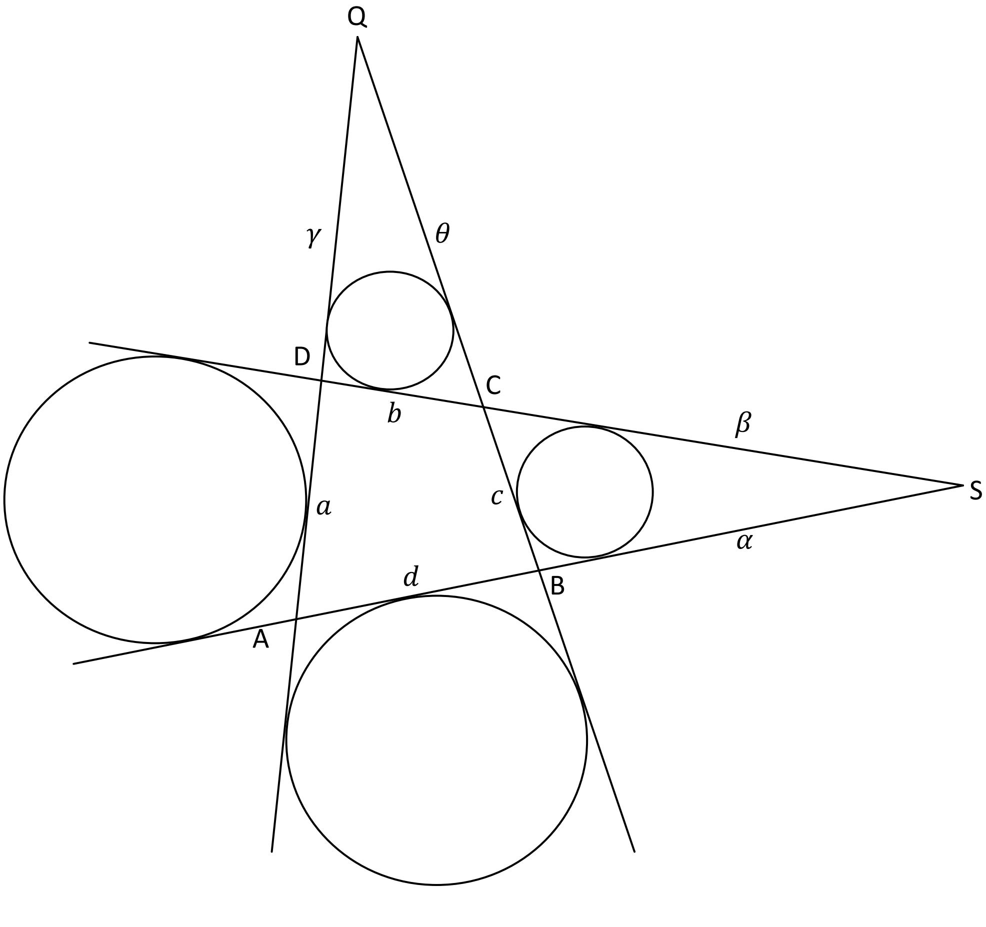
karena $Y' = Y$ maka garis $SGe_3$, $DY_1$ dan $AY_2$ konkuren di $Ge_3$. ■

Dengan menggunakan cara yang sama akan berlaku terhadap pembuktian konkurensi dari $Ge_4$.

**PANJANG SISI BARU**

Pada segiempat siklik *ABCD*, jika tiap sisi diperpanjang maka akan ada sisi yang bertemu disatu titik, sehingga terbentuklah beberapa sisi baru. Selanjutnya akan dibahas cara menghitung panjang sisi-sisi baru tersebut berdasarkan panjang sisi segiempat konveks. Misalkan segiempat sebarang dengan panjang sisi yang diketahui, yaitu $AD = a,\ DC = b,\ BC = c$ dan $AB = d$.

Pada gambar 4, tidak ada sisi segiempat yang sejajar. Keempat sisi berbeda panjang antara satu dengan yang lainnya. Perpanjang sisi $AB$ dan $DC$, karena salah satu sisi lebih pendek dari sisi yang didepannya maka perpanjangan garis tersebut akan berpotongan disatu titik. Namakan titik perpotongannya adalah titik $S$, dan misalkan panjang $BS = \alpha$ dan panjang $CS = \beta$. Perpanjang sisi $AD$ dan $BC$. Maka perpanjangan garis tersebut akan berpotongan disatu titik. Namakan titik perpotongannya adalah titik $Q$, dan misalkan panjang $DQ = \gamma$ dan panjang $CQ = \theta$.




**Gambar 4. Segiempat $ABCD$ dengan perpanjang sisi $AB$, $DC$, $AD$ dan $BC$**

pada segiempat $ABCD$ dan $\Delta\, BCS$ akan diperoleh:

$$\angle DAB + \angle DCB = 180^0 \qquad \ldots 3$$

$$\angle DCB + \angle BCS = 180^0 \qquad \ldots 4$$

Maka dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$$\angle DAB = \angle BCS \qquad \ldots 5$$

Dengan

$$\angle DAB = \angle DAS \qquad \ldots 6$$

Kemudian pandang segiempat $ABCD$ dan $\Delta\, BCS$ akan diperoleh

$$\angle CDA + \angle ABC = 180^0 \qquad \ldots 7$$

$$\angle ABC + \angle SBC = 180^0 \qquad \ldots 8$$

Maka dari persamaan (7) dan (8) diperoleh

$$\angle CDA = \angle SBC \qquad \ldots 9$$

Dengan

$$\angle CDA = \angle SDA \qquad \ldots 10$$

Sehingga dari persamaan (5) dan (10) dan dengan kesebangunan [8] sudut-sudut, diperoleh :

$$\Delta\, ADS = \Delta\, BCS \qquad \ldots 11$$

Akibatnya

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{d+\alpha}{\beta} = \frac{b+\beta}{\alpha} \qquad \ldots 12$$

Dengan mengambil dua persamaan dari persamaan (12)

$$\frac{a}{c} = \frac{d+\alpha}{\beta}$$

$$a\beta = c\,(d+\alpha)$$

$$\beta = \frac{c}{a}\,(d+\alpha)$$

$$\beta = \frac{cd+c\alpha}{a} \qquad \ldots 13$$

Selanjutnya dengan mengambil dua persamaan lainnya dari persamaan (12)

$$\frac{a}{c} = \frac{b+\beta}{\alpha}$$

$$a\alpha = c(b+\beta)$$

$$a\alpha = cb + c\beta \qquad \ldots 14$$

Substitusikan persamaan (13) kepersamaan (14) diperoleh

$$a\alpha = cb + c\left(\frac{cd+c\alpha}{a}\right)$$

$$a^2\alpha = abc + c^2d + c^2\alpha$$

$$a^2\alpha - c^2\alpha = abc + c^2d$$

$$\alpha\,(a^2 - c^2) = abc + c^2d$$

$$\alpha = \frac{abc+c^2d}{a^2-c^2} \qquad \ldots 15$$

Sehingga panjang $BS = \alpha = \frac{abc+c^2d}{a^2-c^2}$. Setelah memperoleh nilai $\alpha$, maka subtitusikan persamaan (15) kepersamaan (13)

$$\beta = \frac{cd+c\alpha}{a}$$

$$a\beta = cd + c\alpha$$

$$a\beta = cd + c\left(\frac{abc+c^2d}{a^2-c^2}\right)$$

$$a\beta = \left(\frac{a^2cd - c^3d + abc^2 + c^3d}{a^2-c^2}\right)$$

$$\beta = \frac{acd+bc^2}{a^2-c^2} \qquad \ldots 16$$

Sehingga panjang $CS = \beta = \frac{acd+bc^2}{a^2-c^2}$.

Dari pembahasan diatas didapatlah panjang sisi $BS = \alpha = \frac{abc+c^2d}{a^2-c^2}$ dan $CS = \beta = \frac{acd+bc^2}{a^2-c^2}$. Ini berlaku untuk nilai $a > c$ dan $d > b$, tetapi jika sebaliknya $a < c$ dan $d < b$ maka nilai $\alpha$ dan $\beta$ akan menjadi negative. Hal Ini tidak mungkin, karena panjang sisi tidak mungkin negative. Oleh karena itu maka diambillah nilai mutlaknya. Sehingga panjang sisi $\alpha$ dan $\beta$ menjadi $BS = \alpha = \frac{abc+c^2d}{|a^2-c^2|}$ dan $CS = \beta = \frac{acd+bc^2}{|a^2-c^2|}$.

Dengan menggunakan cara yang sama maka akan didapat nilai $\gamma$ dan $\theta$.

## KESIMPULAN

Dari hasil artikel ini dapat disimpulkan bahwa Titik Gergonne tidak hanya terdapat pada Segitiga, tapi juga terdapat pada segiempat siklik. Konkurensi titik Gergonne dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva, sedangkan untuk mencari panjang sisi baru yang didapat dari perpanjangan segiempat siklik bisa digunakan kesebangunan.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C, 1967.

[2] T. Desi, M. Natsir dan Hasriati. *Konkurensi Titik Gergonne*. Universitas Riau, Pekanbaru.

[3] F. L. Down Jr. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company. INC., Reading, 1964.

[4] Gogeometry.com/center/gergonne-point-theorem-html-ipad-nexus.htm, diakses pada 16 Oktober 2014, pk. 02.15 PM.

[5] http://gogeometry.com/geometry/p682 triangle_Gergonne_points_excircle tangency point concurrent.htm, diakses pada 16 Oktober 2014, pk. 02.15.

[6] M. Josefsson, *More Characterizations of Tangential Quadrilaterals*, Forum Geometricorum, 11 (2011), 65-82.

[7] Mashadi, 2012, *Geometri*, Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.

[8] W. Simangunsong dan Sukino, *Matematika Untuk SMP Kelas IX*, Erlangga, Jakarta, 2006.

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Incircle_and_excircles_of_a_triangle, diakses 10 Agustus 2014, pk. 04.37 PM.

[10] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Departement of Mathematics Florida Atlantic University, Summer, 2001.