KARISMATIKA p-ISSN : 2443 – 0366
VOL. 3 NO. 1 APRIL 2017 e-ISSN : 2528 – 0279

BERKAS PARABOLA

FIKROTUN BAHIROH[1], MASHADI[2], KARTINI[3]

[1]FMIPA Universitas Riau, fikrotun.bahiroh@yahoo.co.id
[2]FMIPA Universitas Riau, mashadi.mat@gmail.com
[3]FKIP Universitas Riau, tin_baa@yahoo.co.id

ABSTRAK

Pada buku teks telah banyak dibahas mengenai berkas lingkaran. Pada artikel ini dikonstruksi berkas parabola. Jika diberikan dua parabola l_1 dan l_2 yang sejenis, maka bentuk $l_1 + kl_2 = 0$ dengan k sebarang bilangan real dan $k \neq -1$ merupakan berkas parabola yang melalui titik-titik perpotongan kedua parabola. Artikel ini juga membahas kasus khusus berkas parabola seperti berkas parabola yang melewati suatu titik, berkas parabola yang menyinggung sumbu simetri dan berkas parabola yang menyinggung suatu garis.

Kata kunci: *Perpotongan parabola, berkas lingkaran, berkas parabola, eksistensi parabola.*

1. Pendahuluan

Pada berbagai buku teks baik di tingkat sekolah menengah atas maupun jenjang yang lebih tinggi telah dibahas mengenai berkas lingkaran [2, 3, 4, 5, 7, 9] dan sangat sedikit membahas mengenai berkas parabola. Berkas lingkaran merupakan kumpulan dari lingkaran yang terbentuk dari persamaan lingkaran yang memuat suatu parameter [7]. Sebuah parameter adalah suatu konstanta yang dapat disesuaikan fungsinya [7].

Secara geometris, pada berkas lingkaran apabila terdapat dua lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ yang saling berpotongan, maka bentuk $L_1 + kL_2 = 0$ dengan k sebarang bilangan real dan $k \neq -1$ akan membentuk berkas lingkaran dengan persamaan

$$x^2 + y^2 + \frac{A_1 - kA_2}{1 + k}x + \frac{B_1 - kB_2}{1 + k}y + \frac{C_1 - kC_2}{1 + k} = 0$$

dimana L_1 dan L_2 sebagai lingkaran dasar/basis [7]. Jika titik (x', y') merupakan titik potong L_1 dan L_2, maka titik tersebut akan dilewati oleh semua anggota berkas lingkaran [10]. Dengan ide yang sama seperti berkas lingkaran, pada berkas parabola apabila terdapat dua parabola l_1 dan l_2 yang saling berpotongan, maka bentuk $l_1 + kl_2 = 0$ dengan k sebarang bilanga real dan $k \neq -1$ tidak selalu membentuk berkas parabola.

Dari penjelasan singkat mengenai berkas lingkaran, pada artikel ini dikembangkan teori berkas pada parabola. Parabola merupakan kurva yang dibentuk oleh titik yang bergerak sedemikian rupa yang jaraknya dari titik tertentu selalu sama dengan jarak dari garis lurus yang diberikan. Seperti halnya berkas lingkaran, apabila terdapat sebuah persamaan parabola yang memuat suatu parameter maka persamaan tersebut menyatakan sebuah himpunan parabola atau disebut dengan berkas parabola. Akan tetapi akibat dari arti geometris, bahwa perpotongan dua buah parabola tidak selalu mengahasilkan parabola, tetapi juga dapat menghasilkan irisan kerucut lainnya seperti lingkaran, elips dan hiperbola.

2. Eksistensi Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap suatu titik tertentu dan garis tertentu. Titik tertentu itu disebut titik api (fokus) dan garis tertentu itu disebut direktris $[1, 3, 6, 8, 11, 12]$.

Eksistensi dari sebuah parabola dapat ditentukan apabila diketahui minimal dua buah bagian dari parabola, seperti titik puncak (verteks) dan fokus, verteks dan garis direktris, fokus dan garis direktris, dan lain sebagainya. Berikut dibahas beberapa syarat untuk mengkonstruksi sebuah parabola.

2.1. Persamaan parabola dengan titik fokus dan direktris yang diketahui

Misalkan persamaan parabola mempunyai direktris $d \equiv y = b - p$ dan titik fokus $F(a, b + p)$, sehingga untuk titik puncak dan titik lain pada parabola dapat diketahui. Karena puncak parabola merupakan titik tengah antara direktris dan fokus, maka titik puncak menjadi

$$V\left(a, \frac{(b+p)+(b-p)}{2}\right) = V\left(a, \frac{2b}{2}\right) = V(a, b)$$

dan sumbu simetri menjadi $x = a$. Karena titik puncak $V(a, b)$ dan sumbu simetri berada pada $x = a$ maka persamaan parabola menjadi

$$(x-a)^2 = 4p(y-b), \tag{1}$$

persamaan (1) merupakan suatu parabola vertikal. Jika nilai $p > 0$ maka persamaan tersebut merepresentasikan parabola terbuka ke atas. Jika nilai $p < 0$, maka paersamaan tersebut merepresentasikan parabola terbuka ke bawah.

Apabila suatu parabola memiliki direktris $d \equiv x = a - p$ dan titik fokus $F(a + p, b)$ maka persamaan parabola menjadi $(y-b)^2 = 4p(x-a)$, yang mana persamaan tersebut merupakan suatu parabola horizontal. Jika nilai $p > 0$ maka persamaan tersebut merepresentasikan parabola terbuka ke kanan. Jika nilai $p < 0$, maka paersamaan tersebut merepresentasikan parabola terbuka ke kiri.

2.2. Persamaan parabola dengan verteks dan fokus yang diketahui

Apabila diketahui dua buah titik pada bidang, misalkan titik puncak $V(a, b)$ dan titik fokus $F(a + p, b)$ maka berdasarkan pengertian parabola, diketahui persamaan parabola merupakan persamaan parabola terbuka ke kanan dengan persamaan

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

Untuk mengetahui nilai dari p jika diketahui $V(a, b)$ dan $F(a + p, b)$, misalkan $a + p = q$ maka $p = q - a$ dengan q merupakan konstanta.

Sehingga persamaan parabola menjadi

$$(y-b)^2 = 4(q-a)(x-a)$$

$$y^2 - 4(q+a)x - 2by = -(b^2 - 4a^2 - 4qa) \tag{2}$$

Dengan hal yang sama, apabila diketahui $V(a, b)$ dan $F(-(a + p), b)$ maka persamaan parabola tersebut merupakan parabola terbuka ke kiri.

2.3. Persamaan parabola dengan verteks dan garis direktris yang diketahui

Apabila diketahui titik puncak $V(a, b)$ dan garis direkris d sejajar sumbu-x, maka diperoleh sumbu simetri $x = a$ dan garis direktris $y = b - p$, sehingga titik fokusnya menjadi $F(a, b + p)$.

Berdasarkan definisi parabola jarak $FP = PQ$, maka diperoleh

$$(x-a)^2 = 4p(y-b)$$

Dengan hal yang sama, apabila diketahui titik puncak $V(a,b)$ dan garis direktris d sejajar sumbu-y, maka diperoleh sumbu simetri $y = b$ dan garis direktris $x = a - p$, sehingga titik fokusnya menjadi $F(a+p,b)$. Berdasarkan definisi parabola jarak $FP = PQ$, persamaan parabola menjadi

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

2.4. Persamaan parabola yang melewati 3 titik

Apabila diketahui 3 titik sebarang pada bidang, maka dari ketiga titik tersebut dapat dibentuk sebuah parabola yang melewati ketiga titik tersebut. Misalkan titik $\alpha(x_1,y_1)$, $\beta(x_2,y_2)$, $\gamma(x_3,y_3)$ dan andaikan persamaan parabola berpuncak di $V(a,b)$ dan sumbu simetri berada pada $x = a$ maka dari penjelasan sebelumnya, diperoleh persamaan

$$(x-a)^2 = 4p(y-b)$$

$$\frac{x^2-2ax+a^2+4pb}{4p} = y$$

$$y = Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{3}$$

Persamaan (3) merupakan bentuk umum persamaan parabola dengan $A = \frac{1}{4p}$, $B = -\frac{a}{2p}$, dan $C = \frac{a^2+4pb}{4p}$. Selanjutnya, substitusi masing-masing titik $\alpha(x_1,y_1)$, $\beta(x_2,y_2)$, $\gamma(x_3,y_3)$ kedalam persamaan (3), dari persamaan tersebut diperoleh 3 variabel, yaitu A, B dan C.

$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C, \tag{4}$$

$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C, \tag{5}$$

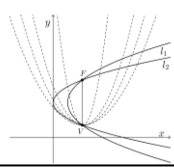
$$y_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C. \tag{6}$$

Dari eliminasi persamaan (4), (5), dan (6) diperoleh nilai A dan B, untuk mencari nilai C substitusikan nilai A dan B ke dalam salah satu persamaan (4), (5), dan (6). Untuk memperoleh persamaan parabola yang melewati tiga titik, substitusi kembali nilai A, B, C ke dalam persamaan (3).

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

Dari penjelasan-penjelasan tersebut dapat diketahui bahwa untuk menentukan suatu persamaan parabola dibutuhkan suatu titik (x, y) yang merupakan salah satu titik pada parabola, selain itu juga dibutuhkan suatu nilai a dan b yang merupakan titik puncak dari parabola tersebut. Dengan menggunakan hubungan minimal dua titik atau dua bagian dari parabola, maka dapat ditentukan nilai dari titik pusat ataupun titik-titik yang merupakan bagian dari parabola. Dengan kata lain, persamaan suatu parabola dapat ditentukan minimal terdapat dua titik atau bagian dari parabola.

Selain dengan menggunakan dua bagian dari parabola, eksistensi parabola juga dapat ditentukan untuk kasus melalui atau menggunakan titik potong dari dua parabola yang saling berpotongan sebagai bagian dari parabola yang akan dikonstruksi, sehingga apabila terdapat dua titik potong dari perpotongan dua parabola, maka belum tentu kedua titik tersebut merupakan titik puncak atau titik fokus dari parabola, sehingga untuk mengkonstruksi parabola baru perlu ditambah kasus tertentu dari parabola baru yang akan dibentuk.



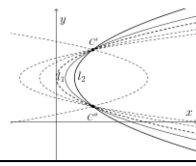
Gambar 1. Titik potong dua parabola sebagai titik pucak dan fokus dari parabola baru

Gambar 1 merupakan salah satu contoh kasus mengkonstruksi parabola dari titik potong dua parabola. Titik V dan F merupakan titik potong dua parabola dan merupakan titik puncak dan titik fokus dari parabola baru yang dibentuk.

Selain menjadi titik puncak dan titik fokus untuk parabola baru, titik potong dua parabola juga dapat menjadi titik-titik latus rektum untuk parabola baru. Gambar 2 menunjukkan bahwa titik potong dari dua buah parabola dapat menjadi titik C' dan C''

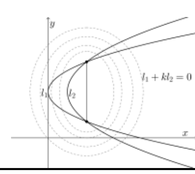
p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

yang mana panjang dari $C'C''$ merupakan panjang latus rektum dari parabola yang baru dibentuk.



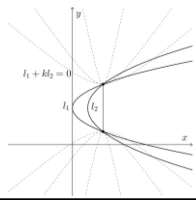
Gambar 2. Titik potong dua parabola sebagai titik-titik latus rektum dari parabola baru

Perpotongan dua buah parabola dengan dua titik potong tidak hanya dapat menghasilkan parabola, tetapi juga dapat menghasilkan bentuk berkas irisan kerucut lain seperti elips dan hiperbola. Gambar 3 menunjukkan perpotongan dua buah parabola dapat menjadi titik-titik fokus untuk beberapa elips, begitu juga pada Gambar 4 perpotongan dua buah parabola juga dapat menjadi titik-titik puncak untuk hiperbola.



Gambar 3. Titik potong dua parabola sebagai titik-titik fokus dari kumpulan elips

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279



Gambar 4. Titik potong dua parabola sebagai titik-titik puncak dari kumpulan hiperbola

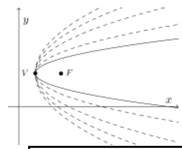
Gambar 4 merupakan kumpulan hiperbola yang terbentuk dari dua buah perpotongan parabola, dengan titik potong parabola sebagai titik-titik puncak hiperbola.

3. Berkas Parabola

Suatu kumpulan lingkaran khususnya yang melewati perpotongan dua buah lingkaran disebut dengan berkas lingkaran, hal tersebut dapat juga berlaku pada irisan kerucut lain yakni parabola. Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap suatu titik tertentu dan garis tertentu [1, 3, 8, 11, 12].

Sebuah parabola dengan persamaan $y^2 - 4px - 2by + b^2 + 4pa = 0$ dapat menyatakan suatu berkas parabola dengan fokus $F(a + p, b)$ dan titik puncak (vertex) $V(a, b)$ sebagai parameter, sehingga maka persamaan tersebut menyatakan sebuah himpunan semua parabola atau dikenal dengan berkas parabola, seperti yang dapat dilihat pada Gambar 5. Dengan merujuk pada definisi berkas lingkaran, berkas parabola dapat didefinisikan sebagai berikut

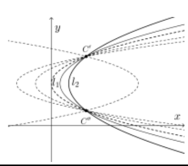
Definisi 1. Berkas parabola merupakan kumpulan parabola yang terbentuk dari persamaan parabola yang memuat suatu parameter.



Gambar 5. Berkas Parabola

Gambar 5 merupakan berkas parabola dengan titik puncak $V(a, b)$ dan panjang latus rektum yang berubah-ubah, selain itu berkas parabola juga dapat terbentuk dari perpotongan dua buah parabola. Misalkan terdapat dua bentuk persamaan parabola l_1 dan l_2 yang melalui (a, b) dan saling berpotongan, dari perpotongan dua buah parabola dapat dibuat sejumlah parabola baru, yang disebut juga dengan berkas parabola.

Dengan merujuk kepada konsep berkas lingkaran, ternyata persamaan $l_1 + kl_2 = 0$ dengan $k \neq -1$ juga merupakan suatu berkas parabola dengan l_1 dan l_2 sebagai parabola dasar yang sama-sama berbentuk horizontal atau sama-sama berbentuk vertikal.



Gambar 6. Berkas parabola dari perpotongan dua parabola

Apabila terdapat dua parabola yang keduanya berbentuk horizontal dengan persamaan $l_1 \equiv y^2 - 4px - 2b_1y + b_1^2 + 4pa_1 = 0$ dan $l_2 \equiv y^2 - 4px - 2b_2y + b_2^2 + 4pa_2 = 0$ dan nilai $p > 0$, maka $l_1 + kl_2 = 0$ menjadi

$$y^2 - 4px - \left(\frac{b_1+kb_2}{1+k}\right)2y + \left(\frac{{b_1}^2+k{b_2}^2}{1+k}\right) + \left(\frac{a_1+ka_2}{1+k}\right)4p = 0 \tag{7}$$

Himpunan semua parabola yang memenuhi persamaan (7) disebut berkas parabola dengan l_1 dan l_2 sebagai parabola dasar.

Selanjutnya untuk membentuk suatu persamaan parabola dengan persamaan berkas parabola $l_1 + kl_2 = 0$ dan melalui titik potong parabola l_1 dan l_2 diperlukan kasus tertentu, apakah suatu berkas parabola melalui sebuah titik, berkas parabola menyinggung sumbu, atau berkas parabola menyinggung sebuah garis dan lain sebagainya. Berikut diuraikan beberapa kasus untuk membentuk berkas parabola, diantaranya:

Kasus 1. **Berkas Parabola yang melewati titik $M(x_1, y_1)$**

Untuk mengkostruksi suatu berkas parabola dengan kasus melewati suatu titik, maka diperlukan suatu nilai parameter k. Misalkan titik $M(x_1, y_1)$ berada di luar parabola $l_1 \equiv y^2 - 4px - 2b_1y + b_1^2 + 4pa_1 = 0$ dan $l_2 \equiv y^2 - 4px - 2b_2y + b_2^2 + 4pa_2 = 0$, berdasarkan $l_1 + kl_2 = 0$, dengan mensubstitusi titik $M(x_1, y_1)$ ke dalam persamaan (7) diperoleh

$${y_1}^2 - \left(\frac{b_1 + kb_2}{1 + k}\right)2y_1 - 4px_1 + \left(\frac{{b_1}^2 + k{b_2}^2}{1 + k}\right) + \left(\frac{a_1 + ka_2}{1 + k}\right)4p = 0$$

$$k = -\frac{{y_1}^2 - 4px_1 - 2b_1y_1 + {b_1}^2 + 4pa_1}{{y_1}^2 - 4px_1 - 2b_2y_1 + {b_2}^2 + 4pa_2} \tag{8}$$

Persamaan (7) merupakan persamaan berkas parabola yang melewati titik $M(x_1, y_1)$ dengan k pada persamaan (8).

Kasus 2. Berkas Parabola yang menyinggung sumbu-y

Untuk mengkonstruksi berkas parabola yang menyinggung sumbu-y, maka nilai $x = 0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (7), sehingga

$$y^2 - \frac{2b_1 - 2kb_2}{1+k}y + \frac{b_1^2 + b_2^2 + 4pa_1 + 4pa_2}{1+k} = 0,$$

$$(1+k)y^2 - (2b_1 - 2kb_2)y + (b_1^2 + b_2^2 + 4pa_1 + 4pa_2) = 0 \qquad (9)$$

dengan $a = (1+k)$; $b = -(2b_1 - 2kb_2)$; $c = (b_1^2 + b_2^2 + 4pa_1 + 4pa_2)$.

Persamaan (9) merupakan persamaan kuadrat dalam y, karena berkas parabola yang dikehendaki menyinggung sumbu-y maka dengan menggunakan sifat $D = b^2 - 4ac$ diperoleh

$$\left(-(2b_1k - 2b_2)\right)^2 - 4(k+1)(b_1^2 + b_2^2 + 4pa_1 + 4pa_2) = 0,$$

$$(4b_1^2)k^2 - 4(2b_1b_2 + b_1^2 - b_2^2 - 4pa_1 - 4pa_2)k - 4(b_1^2 + 4pa_1 + 4pa_2) = 0. \quad (10)$$

Dari persamaan (10) diperoleh

$$k_1, k_2 = -\frac{-2(2b_1b_2 + b_1^2 - b_2^2 - 4pa_1 - 4pa_2)}{(4b_1^2)}$$
$$\pm \frac{\sqrt{\left(-2(2b_1b_2 + b_1^2 - b_2^2 - 4pa_1 - 4pa_2)\right)^2 + 16(4b_1^2)(b_1^2 + 4pa_1 + 4pa_2)}}{(4b_1^2)} \qquad (11)$$

Nilai dari parameter k pada persamaan (11) disubstitusi ke dalam persamaan (7). Maka diperoleh persamaan berkas parabola yang melewati titik potong kedua parabola dan menyinggung sumbu-y.

Kasus 3. Berkas Parabola yang menyinggung garis $y = mx + c$

Apabila berkas parabola meyinggung garis $y = mx + c$, maka persamaan (7) memenuhi $y = mx + c$. Sehingga persamaan (7) menjadi

$$m^2x^2 + (2mc - 4p)x + c^2 - \frac{(b_1 + kb_2)(2mx + 2c)}{1+k} + \frac{b_1^2 + kb_2^2}{1+k} + \frac{a_1 + ka_2}{1+k}4p = 0,$$

$$(m^2 + km^2)x^2 + (2+2k)(mc - p - b_1m - kb_2m)x +$$
$$(c^2 + kc^2 - 2b_1c - 2kc + b_1^2 + kb_2^2 + 4pa_1 + 4pka_2) = 0. \qquad (12)$$

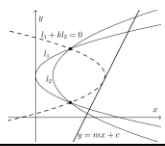
Karena persamaan berkas parabola yang dikehendaki meyinggung garis $y = mx + c$ dan merupakan persamaan kuadrat dalam x, maka berlaku $D = b^2 - 4ac$, sehingga dari persamaan (12) diperoleh

$$k_1, k_2 = -\frac{(2+2k)(mc - p - b_1m - kb_2m)}{2(m^2 + km^2)} \pm \frac{\sqrt{D}}{2(m^2 + km^2)}, \qquad (13)$$

dengan $D = \left((2+2k)(mc - p - b_1m - kb_2m)\right)^2 - 4(m^2 + km^2)(c^2 + kc^2 - 2b_1c - 2kc + b_1^2 + kb_2^2 + 4pa_1 + 4pka_2)$.

Kemudian nilai k pada persamaan (13), disubstitusi ke dalam persamaan (7). Sehingga diperoleh persamaan berkas parabola yang menyinggung garis $y = mx + c$.

Gambar 7 merupakan salah satu anggota berkas parabola yang terbentuk dari perpotongan 2 parabola, dimana parabola juga menyinggung $y = mx + c$.



Gambar 7. Parabola yang menyinggung $y = mx + c$

Contoh 1. Konstruksi sebuah persamaan parabola yang melalui titik potong parabola $l_1 \equiv y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$ dan $l_2 \equiv y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ dan melewati titik $M(1,4)$.

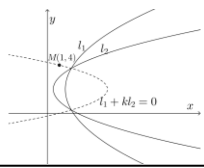
Persamaan parabola baru yang melewati titik $M(1,4)$ merupakan salah satu anggota dari berkas parabola l_1 dan l_2, dan dirumuskan dengan $l_1 + kl_2 = 0$ dengan k sebagai parameter. Sehingga

$$(y^2 - 6x - 4y + 13) + k(y^2 - 2x - 4y + 5) = 0 \qquad (14)$$

Untuk memperoleh nilai k, substitusikan titik $M(1,4)$ dengan $x = 1$ dan $y = 4$ ke dalam persamaan (8), diperoleh $k = -\frac{7}{3}$.

Selanjutnya, substitusikan nilai k kedalam persamaan (14). Dengan perhitungan aljabar, diperoleh berkas parabola dengan persamaan

$$y^2 - 4y - x - 1 = 0.$$



Gambar 8. Parabola yang melewati titik $M(1,4)$

Selanjutnya apabila persamaan l_1 berbentuk horizontal dan l_2 berbentuk vertikal, maka terdapat syarat-syarat untuk nilai parameter k. Misalkan ambil dua bentuk persamaan parabola yang melalui (a, b). Pandang dua parabola saling berpotongan dengan $l_1 \equiv y^2 - 2b_1y - 4px + b_1^2 + 4pa_1 = 0$ dan $l_2 \equiv x^2 - 2a_2x + a_2^2 - 4py + 4pb_2 = 0$, sehingga bentuk $l_1 + kl_2 = 0$ menjadi

$$kx^2 + y^2 - (ka_2 + 2p)2x - (b_1 + 2kp)2y + ka_2^2 + 4pa_1 + b_1^2 + 4kpb_2 = 0 \qquad (15)$$

Dari persamaan (15) diperoleh syarat khusus untuk nilai parameter k, yaitu:

1. Jika niai $k = 0$, maka persamaan (15) menjadi
$$y^2 - 4px - 2b_1y + 4pa_1 + b_1^2 + 4pb_2 = 0. \qquad (16)$$
Persamaan (16) merupakan sebuah parabola dengan bentuk $(y - b)^2 - 4p(x - a) = 0$, yang mana persamaan (16) juga merupakan salah satu parabola dasar dari berkas parabola.

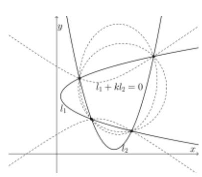
2. Jika $k = 1$, maka persamaan (15) menjadi
$$x^2 + y^2 - (a_2 + 2p)2x - (b_1 + 2p)2y + a_2^2 + 4pa_1 + b_1^2 + 4pb_2 = 0. \qquad (17)$$
Dari persamaan (17) dapat dilihat bahawa koefisien $x^2 = y^2$ dan tidak memuat

KARISMATIKA p-ISSN : 2443 – 0366
VOL. 3 NO. 1 APRIL 2017 e-ISSN : 2528 – 0279

variabel xy, maka persamaan (17) merupakan sebuah lingkaran.

3. Jika $k > 1$ dan $0 < k < 1$, maka misalkan $n = k + 1$, sehingga persamaan (15) menjadi
   $nx^2 + y^2 - (na_2 + 2p)2x - (b_1 + 2np)2y + na_2^2 + 4pa_1 + b_1^2 + 4pb_2 = 0.$ (18)
   Dari persamaan (18) dapat dilihat bahawa koefisien $x^2 \neq y^2$ dan koefisien x^2 dan y^2 bernilai positif, maka persamaan (18) merupakan sebuah elips.

4. Jika $k < 0$, maka misalkan $q = k - 1$, sehingga persamaan (15) menjadi
   $qx^2 + y^2 - (qa_2 + 2p)2x - (b_1 + 2qp)2y + qa_2^2 + 4pa_1 + b_1^2 + 4pb_2 = 0.$ (19)
   Dari persamaan (19) dapat dilihat bahawa koefisien $x^2 \neq y^2$ dan koefisien x^2 bernilai negatif dan y^2 bernilai positif, maka persamaan (19) merupakan sebuah hiperbola.



Gambar 9. Berkas parabola dengan persamaan l_1 berbentuk horizontal dan l_2 berbentuk vertikal

4. Kesimpulan

Dari penjelasan tersebut, dapat disimpulkan bahwa berkas parabola merupakan himpunan parabola yang terbentuk dari persamaan parabola yang memuat suatu parameter dan juga apabila terdapat dua buah parabola yang saling berpotongan dengan persamaan berkas parabola $l_1 + kl_2 = 0$, maka untuk persamaan l_1 dan l_2

sama-sama berbentuk vertikal atau sama-sama berbentuk horizontal akan membentuk suatu kumpulan parabola yang disebut dengan berkas parabola. Kemudian apabila l_1 berbentuk vertikal dan l_2 berbentuk horizontal, maka bentuk $l_1 + kl_2 = 0$ tidak selalu membentuk berkas parabola, tetapi juga dapat membentuk irisan kerucut lain seperti lingkaran, elips dan hiperbola.

5. Referensi

[1] A. V. Akopyan dan A. A. Zaslavsky, *Geometry of Conics*, Rhode Island: American Mathematical Society, 2007.

[2] M. Berger, *Geometry, Volume I, II*. Heidelberg: Springer Verlag, 1987.

[3] W. H. Besant, *Conic Section*. London: George Bell and Sons, 1895.

[4] L. Dovnicovic. *The Realization of the continuity Principle in The Relativistic Pencil of Circle and* Spheres. Novi Sad Journal Math, Vol. 29, No. 3, 97-107, 1998.

[5] E. S. Crawley dan H. B. Evans, *Analytic Geometry*, Philadelphia: American Mathematical Society, 1918.

[6] E. Kohn, *Cliffs Quick Review Geometry*. Bandung: Penerbit Pakar Raya, 2003.

[7] Mashadi, *Geometri Edisi ke-2*. Pekanbaru: UR Press, 2015.

[8] Mashadi, *Geometri Lanjut*. Pekanbaru: UR Press, 2015.

[9] W.K. Morrill, *Analytic Geometry*. Pennsylvania: International Textbook Company, 1967.

[10] D. Pedoe, *Circles: A Mathematical View*. Washington: New Age International Publisher, 1995.

[11] S. Saragih, *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*. Pekanbaru: PUSBANGDIK Universitas Riau, 2011.

[12] I. Vaisman, *Analytical Geometry*. Singapore: World Scientific Publishing, 1997.