

BENTUK LAIN TEOREMA VAN AUBEL PADA SEGITIGA

Wita Maywidia¹, Mashadi², Sri Gemawati³

¹FMIPA Universitas Riau dan SMA Alkaromah Aidarusy, witamaywidia25@gmail.com

²FMIPA Universitas Riau, mashadi.mat@gmail.com

³FMIPA Universitas Riau, gemawati.sri@gmail.com

ABSTRACT

In general the Van Aubel Theorem is constructed from any quadrilateral. Some authors have developed in triangles. In this paper the author develops another form of Van Aubel's theorem on triangles. The proofing process is done in a very simple way that uses congruence, similarity, concurrent and colinear. The result obtained are three pairs of sides that are parallel, equal in length and intersect perpendicular.

Keywords: Van Aubel's theorem, similarity, colinear

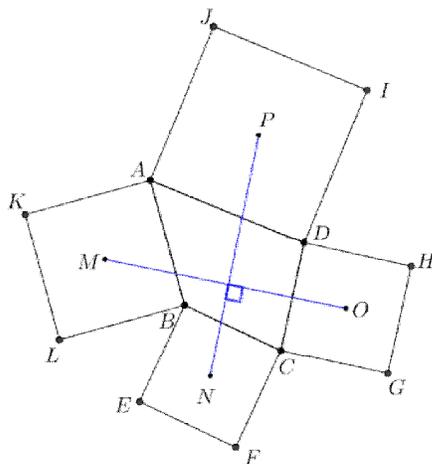
ABSTRAK

Secara umum Teorema Van Aubel dikonstruksi dari segiempat sebarang. Beberapa penulis telah mengembangkan dalam segitiga. Dalam tulisan ini penulis mengembangkan bentuk lain teorema Van Aubel pada segitiga. Proses pembuktiannya dilakukan dengan cara yang sangat sederhana yaitu menggunakan kekongruenan, kesebangunan, kekonkurenan dan kekolinearan. Hasil yang diperoleh adalah terdapat tiga pasang sisi yang sejajar, sama panjang dan berpotongan tegak lurus.

Kata kunci: Teorema Van Aubel, kesebangunan, kekolinearan

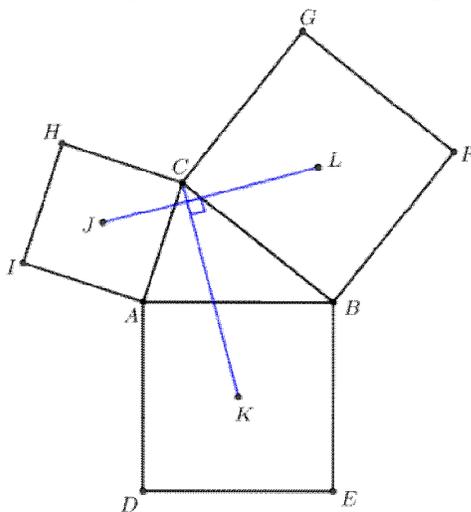
1. PENDAHULUAN

Teorema Van Aubel pertama kali dikemukakan oleh Henri Van Aubel pada tahun 1878 [10]. Teorema Van Aubel dikonstruksi dari segiempat sebarang, kemudian pada setiap sisi segiempat sebarang dibangun persegi, titik-titik potong diagonal persegi yang berlawanan dihubungkan sehingga terbentuk dua sisi sama panjang dan berpotongan tegak lurus (Gambar 1).



Gambar 1. Ilustrasi teorema Van Aubel pada segiempat

Beberapa pengembangan teorema Van Aubel pada segiempat antara lain [4, 6, 15] serta pengembangan lain juga dilakukan pada teorema Van Aubel yaitu dengan memulai konstruksi dari sebuah segitiga sebarang [1, 3]. Teorema Van Aubel pada segitiga menyatakan bahwa, jika persegi $ACHI$, $ADEB$ dan $BFGC$ dengan titik potong diagonal J, K dan L pada sisi AC, AB dan BC pada $\triangle ABC$ maka sisi $JL = CK$ dan JL tegak lurus CK dinyatakan dengan $JL \perp CK$, diilustrasikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Ilustrasi teorema Van Aubel pada segitiga

Berbagai konsep trigonometri aturan sinus dan kosinus dibahas dalam [2, 7, 8], sedangkan beberapa konsep pembuktian kolinearitas dan kekonkurenan terdapat pada [5, 13, 14, 16]. Kemudian pada tulisan ini untuk membuktikan bentuk lain teorema Van Aubel pada segitiga dikerjakan dengan kekongruenan, kesebangunan, kekonkurenan dan kekolinearan.

Pembuktian teorema Van Aubel bisa dijadikan pengayaan dalam mempelajari materi trigonometri di sekolah menengah atas sekaligus mengasah sejauh mana peserta didik bisa memanfaatkan pengetahuan yang dimilikinya pada materi lain seperti persegi dan kesebangunan.

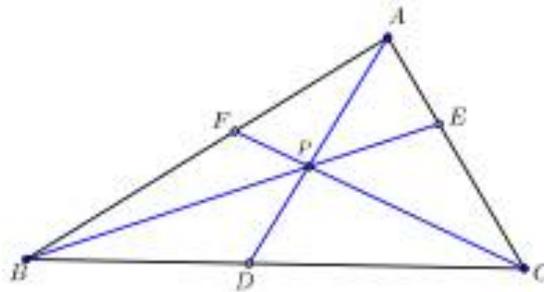
Berdasarkan konsep teorema Van Aubel pada segitiga yaitu menemukan dua sisi yang sama panjang dan tegak lurus, maka penulis tertarik untuk menemukan bentuk lain teorema Van Aubel pada segitiga.

2. Teorema Ceva, Teorema Menelaus, Segitiga *Orthologic* dan Teorema Van Aubel pada Segitiga

2.1 Teorema Ceva

Teorema 1. Jika D, E, F masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA dan AB pada $\triangle ABC$ maka garis AD, BE dan CF adalah kongkuren (bertemu disatu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1$$

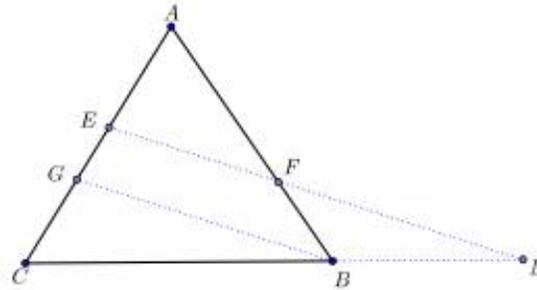


Gambar 3. Ilustrasi teorema Ceva pada segitiga

2.2 Teorema Menelaus

Teorema 2. Jika D, E dan F masing-masing terletak pada sisi BC, CA dan AB pada $\triangle ABC$ maka titik D, E dan F adalah segaris jika dan hanya jika

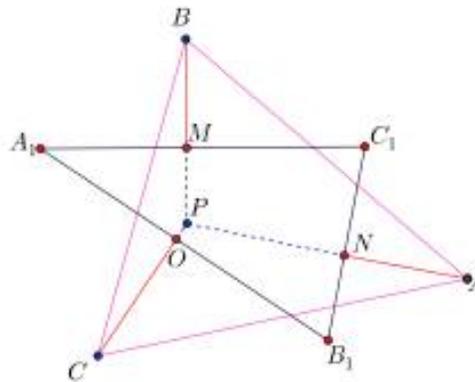
$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = -1$$



Gambar 4. Ilustrasi teorema Menelaus pada segitiga

2.3 Segitiga Orthologic

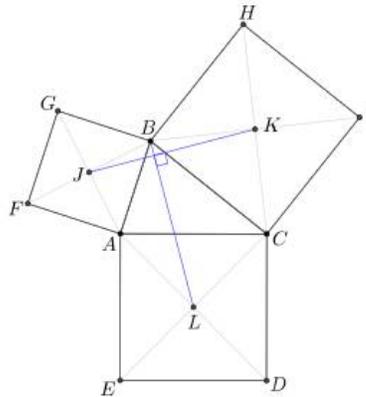
Definisi 3. ΔABC dikatakan *orthologic* dengan $\Delta A_1B_1C_1$ jika garis tegak lurus yang ditarik dari titik A, B dan C berturut-turut ke sisi B_1C_1 , C_1A_1 dan A_1B_1 kongkuren.



Gambar 5. Ilustrasi dua segitiga *orthologic* yang berpotongan

2.4 Teorema Van Aubel pada Segitiga

Teorema 4. Jika persegi $ABGF$, $BCIH$ dan $ACDE$ dengan titik potong diagonal J, K dan L pada sisi AB, BC dan AC pada ΔABC maka sisi $JK = BL$ dan $JK \perp BL$.

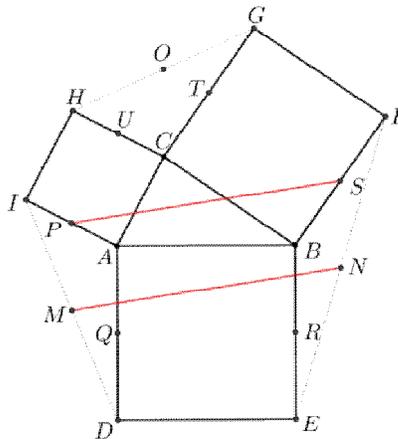


Gambar 6. Ilustrasi teorema Van Aubel pada segitiga

3. Bentuk Lain Teorema Van Aubel pada Segitiga

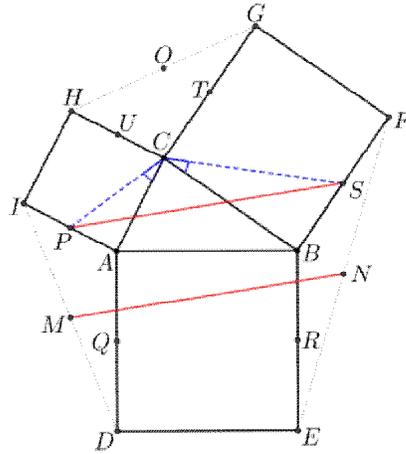
Beberapa bentuk lain teorema Van Aubel pada segitiga yang dibahas pada tulisan ini yaitu sebagai berikut:

Teorema 5. Pada sebarang segitiga ABC dikonstruksi persegi luar untuk tiap sisinya sehingga terbentuk persegi $ACHI$, $ADEB$ dan $BFGC$. Titik P, Q, R, S, T dan U secara berturut-turut merupakan titik tengah AI, AD, EB, BF, GC dan CH . Titik M, N dan O secara berturut-turut merupakan titik tengah ID, EF dan GH , maka $PS = MN$ dan $PS \parallel MN$.



Gambar 7. Bentuk lain pertama Teorema Van Aubel pada segitiga

Bukti: Akan dibuktikan $PS = MN$. Buat $\triangle PCA$ dan $\triangle SCB$. Jika panjang $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ maka akan selalu berlaku $PC = \frac{1}{2}\sqrt{5}b$, $SC = \frac{1}{2}\sqrt{5}a$. Misal $\angle PCA$ adalah θ , sehingga $\angle SCB = \theta$. Diilustrasikan pada Gambar 8.



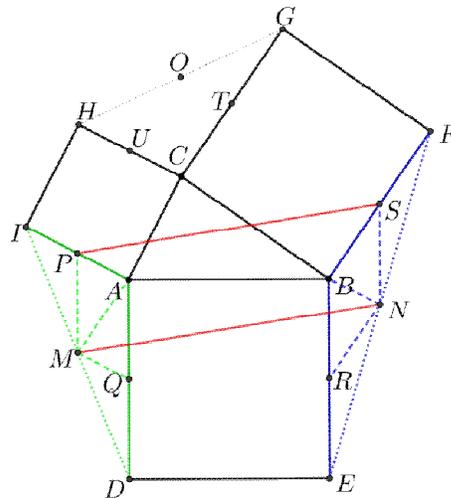
Gambar 8. Ilustrasi pembuktian panjang PS

Selanjutnya, akan ditentukan panjang PS dengan menggunakan aturan cosinus. Pandang ΔPSC , diperoleh

$$PS^2 = PC^2 + SC^2 - 2PC \cdot SC[\cos(2\theta + \angle ACB)]$$

$$PS^2 = \frac{5}{4}b^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab \cos \angle ACB + \frac{20}{10}ab \sin \angle ACB$$

$$PS^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 - \frac{3}{2}ab \cos \angle ACB + 2ab \sin \angle ACB(1)$$



Gambar 9. Ilustrasi pembuktian PS sejajar MN

Lalu, pandang ΔMPI dan ΔDAI , diketahui $\frac{AP}{IA} = \frac{IM}{ID} = \frac{1}{2}$, $\angle PIM = \angle AID$ (dipakai bersama) karena memenuhi syarat sisi-sudut-sisi, maka $\Delta MPI \sim \Delta DAI$. Sehingga berlaku

$$PM = \frac{1}{2}c \quad (2)$$

dengan menggunakan aturan cosinus pada ΔDAI diperoleh

$$ID^2 = AI^2 + AD^2 - 2 \cdot AI \cdot AD \cos \angle DAI$$

$$ID^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - \angle CAB)$$

$$ID^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \angle CAB$$

dari $\triangle DAI$ juga diketahui bahwa AM adalah garis berat $\triangle DAI$, sehingga diperoleh

$$AM^2 = \frac{1}{2}AI^2 + \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}ID^2$$

$$AM^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc \cos \angle CAB)$$

$$AM^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{2}{4}bc \cos \angle CAB$$

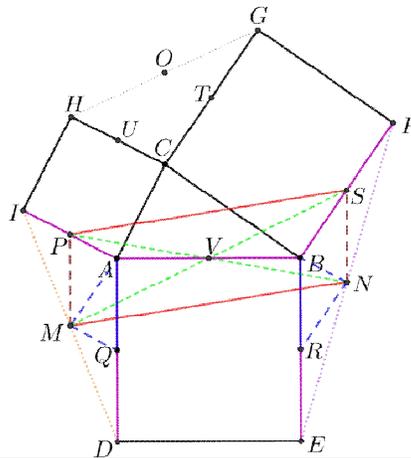
$$AM^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$AM = \frac{1}{2}a$$

Disisi lain pandang $\triangle MDQ$ dan $\triangle IDA$, diketahui bahwa $\frac{DQ}{DA} = \frac{DM}{DI} = \frac{1}{2}$, $\angle MDQ = \angle IDA$ dipakai bersama), karena memenuhi syarat sisi-sudut-sisi, maka $\triangle MDQ \sim \triangle IDA$. Sehingga berlaku

$$QM = \frac{1}{2}b$$

karena $AM = \frac{1}{2}a$, $QM = \frac{1}{2}b$ dan $AQ = \frac{1}{2}c$ maka $\triangle QAM$ sebangun dengan $\triangle ABC$. Sehingga diperoleh $\angle QAM = \angle ABC$, $\angle AMQ = \angle ACB$ dan $\angle MQA = \angle BAC$.



Gambar 10. Ilustrasi pembuktian $\triangle QAM$, $\triangle BRN$ sebangun dengan $\triangle ABC$

Selanjutnya, kontruksi titik V ditengah AB . Lalu, pandang $\triangle VAM$ pada Gambar 10, diperoleh

$$\angle VAM = 90^\circ + \angle ABC$$

dari $\triangle VBS$ diperoleh

$$\angle VBS = 90^\circ + \angle ABC$$

karena $AM = BS = \frac{1}{2}a$, $AV = VB$ dan $\angle VAM = \angle VBS$ maka $\triangle VAM = \triangle VBS$ sehingga didapat bahwa

$$MV = VS \quad (3)$$

Pandang $\triangle FSN$ dan $\triangle FBE$, diketahui $\frac{FS}{FB} = \frac{FN}{FE} = \frac{1}{2}$ dan $\angle NFS = \angle EFB$ (dipakai bersama), karena memenuhi syarat sisi-sudut-sisi, maka $\triangle FSN \sim \triangle FBE$. Sehingga berlaku

$$SN = \frac{1}{2}c \quad (4)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan aturan cosinus pada $\triangle BEF$ diperoleh

$$\begin{aligned} EF^2 &= BF^2 + BE^2 - 2 \cdot BF \cdot BE \cos \angle EBF \\ EF^2 &= BF^2 + BE^2 - 2 \cdot BF \cdot BE \cos (180^\circ - \angle ABC) \\ EF^2 &= a^2 + c^2 + 2ac \cos \angle ABC \end{aligned}$$

Pada $\triangle FBE$ diketahui bahwa BN adalah garis berat $\triangle BEF$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} BN^2 &= \frac{1}{2}BF^2 + \frac{1}{2}BE^2 - \frac{1}{4}EF^2 \\ BN^2 &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + 2ac \cos \angle ABC) \\ BN^2 &= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{2}{4}ac \cos \angle ABC \\ BN^2 &= \frac{1}{4}b^2 \\ BN &= \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

Pandang $\triangle NRE$ dan $\triangle FBE$ pada Gambar 10, diketahui $\frac{ER}{EB} = \frac{EN}{EF} = \frac{1}{2}$ dan $\angle REN = \angle BEF$ (dipakai bersama) karena memenuhi syarat sisi-sudut-sisi, maka $\triangle NRE \sim \triangle FBE$. Sehingga berlaku

$$RN = \frac{1}{2}a$$

karena $BR = \frac{1}{2}c$, $BN = \frac{1}{2}b$ dan $RN = \frac{1}{2}a$ maka didapat $\triangle BRN$ sebangun dengan $\triangle ABC$. Sehingga diperoleh $\angle BRN = \angle ABC$, $\angle NBR = \angle BAC$ dan $\angle RNB = \angle ACB$.

Selanjutnya, pandang $\triangle NBV$ pada Gambar 6, diperoleh

$$\angle NBV = 90 + \angle BAC$$

disisi lain juga diketahui bahwa

$$\angle PAV = 90 + \angle BAC$$

karena $\angle NBV = \angle PAV$, $AV = VB$ dan $AP = BN$ sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$PV = VN \quad (5)$$

Dari persamaan (2), (3), (4) dan (5) diperoleh bahwa

$$PM = SN \quad (6)$$

dan

$$PM // SN \quad (7)$$

Selanjutnya dari persamaan (2), (3), (4), (5), (6) dan (7) diperoleh bahwa

$$PS = MN \quad (8)$$

artinya,

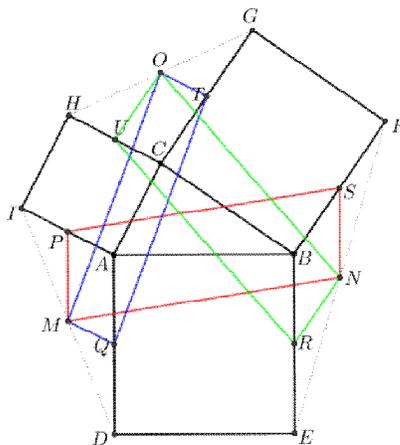
$$MN^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 - \frac{3}{2}ab \cos \angle ACB + 2ab \sin \angle ACB \quad (9)$$

dan

$$PS // MN \quad (10)$$

Berdasarkan persamaan (8) dan (10) maka terbukti teorema ini. ■

Akibat 6. Jika diketahui M, N, O secara berturut-turut merupakan titik tengah ID, EF, GH dan titik P, Q, R, S, T dan U secara berturut-turut adalah titik tengah IA, AD, EB, BF, GC dan CH maka $PMNS, RNOU$ dan $MQTO$ adalah jajar genjang.

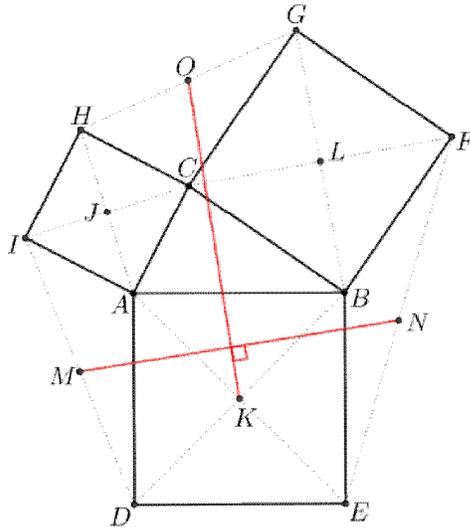


Gambar 11. Jajar genjang $PMNS, RNOU$ dan $MQTO$

Bukti: Berdasarkan persamaan (3), (5), (6), (7), (8), (10) dan diketahui $\angle PMN + \angle MNS = \angle NSP + \angle SPM = \angle SPM + \angle PMN = \angle MNS + \angle NSP = 180$ (sudut dalam sepihak), juga diketahui $\angle PMN = \angle NSP$ dan $\angle SPM = \angle MNS$ (sudut-sudut yang berhadapan), dapat disimpulkan $PMNS$ adalah jajar genjang.

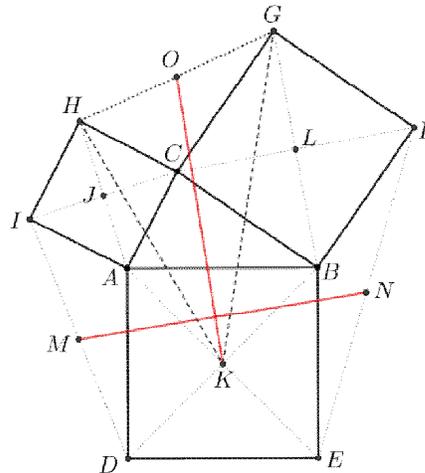
Langkah pembuktian yang sama berlaku untuk $RNOU$ dan $MQTO$.

Teorema 7. Pada sebarang $\triangle ABC$ dikonstruksi persegi luar untuk tiap sisinya sehingga terbentuk persegi $ACHI, ADEB, BFGC$ dan J, K, L merupakan titik potong diagonalnya. Titik M, N, O secara berturut-turut adalah titik tengah ID, EF, GH , maka $KO = MN$ dan $KO \perp MN$.



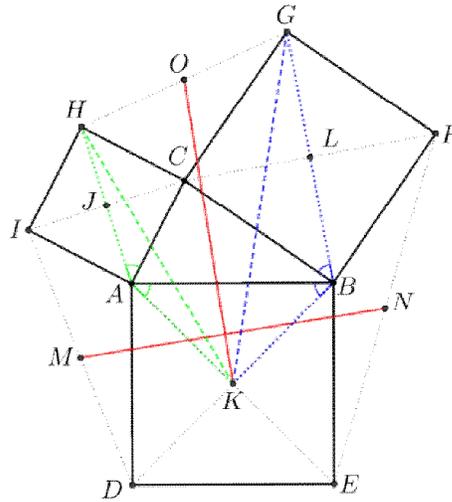
Gambar 12. Bentuk lain kedua Teorema Van Aubel padasegitiga

Bukti: Dari persamaan (9) diperoleh $MN^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 - \frac{3}{2}ab \cos \angle ACB + 2ab \sin \angle ACB$. Selanjutnya, akan ditentukan panjang KO . Buat $\triangle HKG$ seperti yang terlihat pada Gambar 13.



Gambar 13. Ilustrasi pembuktian KO

Diketahui O adalah titik tengah GH , sehingga KO merupakan garis berat $\triangle HKG$ dan panjang KO dapat ditentukan dengan mengetahui panjang HK, GK dan HG . Buat $\triangle HAK$ untuk memperoleh panjang HK dan $\triangle KBG$ untuk menentukan panjang GK , seperti yang terlihat pada Gambar 14.



Gambar 14. Ilustrasi pembuktian KO dengan bantuan $\triangle HAK$ dan $\triangle KBG$

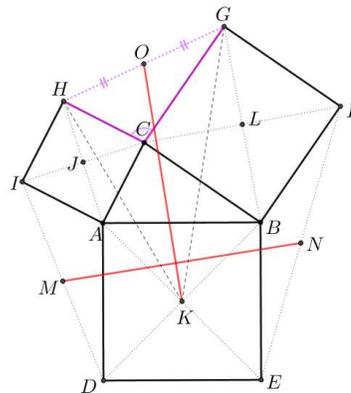
dari $\triangle HAK$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 HK^2 &= AH^2 + AK^2 - 2 AHAK \cos (90^\circ + \angle BAC) \\
 HK^2 &= (b\sqrt{2})^2 + \left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2(b\sqrt{2})\left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right) \cos (90^\circ + \angle BAC) \\
 HK^2 &= 2b^2 + \frac{1}{2}c^2 + 2bcc \sin \angle BAC \tag{11}
 \end{aligned}$$

dari $\triangle KBG$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 GK^2 &= BG^2 + BK^2 - 2.BG.BK \cos (90^\circ + \angle ABC) \\
 GK^2 &= (a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2(a\sqrt{2})\left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right) \cos (90^\circ + \angle ABC) \\
 GK^2 &= 2a^2 + \frac{1}{2}c^2 + 2bc \sin \angle BAC \tag{12}
 \end{aligned}$$

Setelah memperoleh panjang HK dan GK akan ditentukan panjang HG .



Gambar 15. Ilustrasi pembuktian KO dengan bantuan $\triangle HCG$

Pandang $\triangle HCG$ pada Gambar 15, dengan menggunakan aturan cosinus diperoleh

$$\begin{aligned}GH^2 &= CG^2 + CH^2 - 2CG \cdot CH \cos (180^\circ - \angle ACB) \\GH^2 &= a^2 + b^2 - 2ab (-\cos \angle ACB) \\GH^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \angle ACB\end{aligned}\quad (13)$$

KO adalah garis berat $\triangle HKG$, berdasarkan teorema Garis Berat maka berlaku

$$KO^2 = \frac{1}{2}HK^2 + \frac{1}{2}GK^2 - \frac{1}{4}GH^2 \quad (14)$$

Selanjutnya, substitusi nilai persamaan (11), (12) dan (13) ke persamaan (14), sehingga diperoleh

$$KO^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{2}{4}c^2 + 2bc \sin \angle BAC - \frac{2}{4}ab \cos \angle ACB \quad (15)$$

dari $\triangle ABC$ dengan menggunakan aturan cosinus pada $\angle C$ diperoleh

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB \quad (16)$$

serta dengan menggunakan aturan sinus pada $\triangle ABC$ diperoleh

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} \quad (17)$$

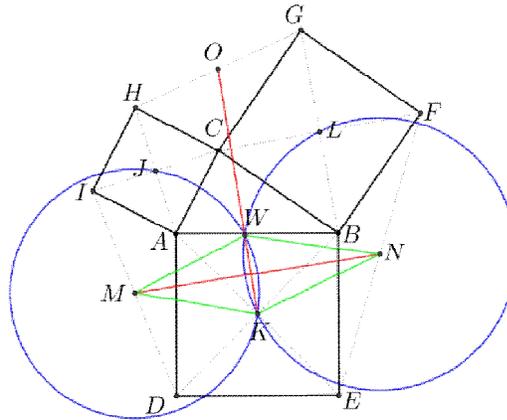
Dengan mensubstitusikan persamaan (16) dan (17) ke persamaan (15) maka didapat

$$\begin{aligned}KO^2 &= \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{2}{4}(a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB) + 2bc \sin\left(\frac{a \sin C}{c}\right) - \\&\quad \frac{2}{4}ab \cos \angle ACB \\KO^2 &= \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 - \frac{3}{2}ab \cos \angle ACB + 2ab \sin \angle ACB\end{aligned}\quad (18)$$

Jadi, dari persamaan (9) dan (18) dapat disimpulkan bahwa

$$KO = MN \quad (19)$$

Selanjutnya, akan dibuktikan $KO \perp MN$. Langkah pertama adalah dengan membuat lingkaran dengan pusat M dan jari-jari MK . Lalu, buat pula lingkaran yang berpusat di N dengan panjang jari-jari NK (K adalah titik potong diagonal persegi $ADEB$ dan juga berada pada lingkaran berpusat di M dan N). Sehingga diperoleh titik W yang berada pada lingkaran yang berpusat di M dan N , seperti yang terlihat pada Gambar 16.



Gambar 16. Ilustrasi pembuktian layang-layang

Kemudian, pandang $\triangle KMW$, diketahui $MK = MW$, sehingga diperoleh $\triangle KMW$ adalah segitiga sama kaki dan

$$\angle MKW = \angle MWK \quad (20)$$

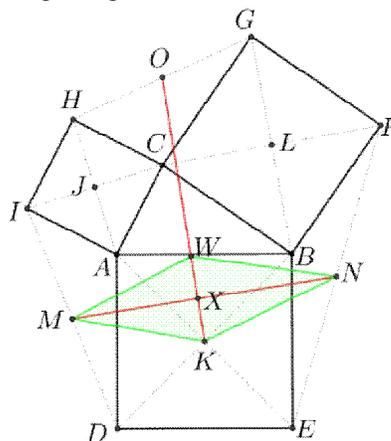
Lalu, pandang $\triangle KNW$, diketahui $NK = NW$, sehingga $\triangle KNW$ adalah segitiga sama kaki dan

$$\angle NKW = \angle NWK \quad (21)$$

Dari persamaan (20) dan (21) didapat

$$\angle MKW + \angle NKW = \angle MWK + \angle NWK \quad (22)$$

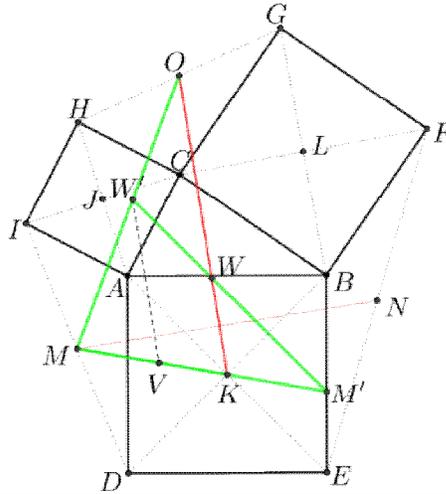
Oleh sebab itu, segiempat $MKNW$ adalah layang-layang dengan diagonalnya WK dan MN yang berpotongan tegak lurus di titik X . Diilustrasikan pada Gambar 17.



Gambar 17. Segiempat layang-layang $MKNW$

Kemudian akan ditunjukkan titik K, W, O segaris. Perpanjang sisi MK sehingga memotong sisi BE di titik M' . Perpanjang sisi MW sehingga memotong sisi MO

dititik W' . Sehingga membentuk $\Delta MW'M'$. Selanjutnya, misalkan titik V pada MM' , sedemikian sehingga garis WV sejajar OK dan juga sejajar WK . Diilustrasikan pada Gambar 18.



Gambar 18. Ilustrasi pembuktian titik K, W, O segaris

Pandang $\Delta W'MV$ dan ΔOMK , $\angle W'MV = \angle OMK$, $\angle MW'V = \angle MOK$, sehingga $\Delta W'MV \sim \Delta OMK$, yang mengakibatkan

$$\frac{W'O}{OM} = \frac{VK}{KM} \quad (23)$$

Lalu, pandang $\Delta M'WK$ dan $\Delta M'W'V$, $\angle WM'K = \angle W'M'V$, $\angle M'KW = \angle M'W'V$, sehingga $\Delta M'WK \sim \Delta M'W'V$, yang mengakibatkan

$$\frac{M'W}{WW'} = \frac{M'K}{KV} \quad (24)$$

Dari persamaan (23) dan (24) diperoleh

$$\frac{M'W}{WW'} \cdot \frac{W'O}{OM} \cdot \frac{MK}{KM'} = \frac{M'K}{KV} \cdot \frac{VK}{KM} \cdot \frac{MK}{KM'} \quad (25)$$

$$\frac{M'W}{WW'} \cdot \frac{W'O}{OM} \cdot \frac{MK}{KM'} = -1$$

karena persamaan (25) memenuhi teorema Menelaus, maka titik W ada di garis OK atau titik O, W, K segaris.

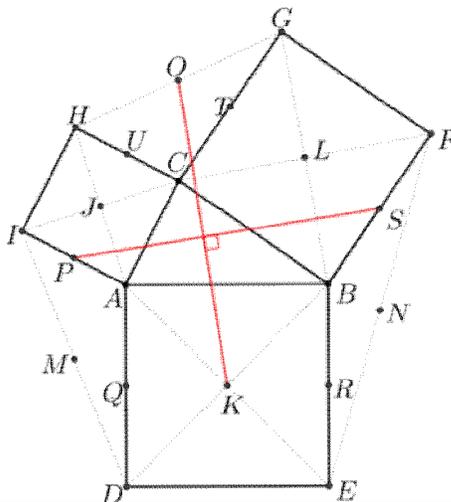
Berdasarkan pembuktian di atas, diperoleh bahwa WK tegak lurus MN dan O, W, K segaris, maka

$$KO \perp MN \quad (26)$$

Berdasarkan persamaan (19) dan (26) maka terbukti teorema ini. ■

Akibat 8. Pada sebarang ΔABC dikonstruksi persegi luar untuk tiap sisinya sehingga terbentuk persegi $ACHI, ADEB, BFGC$ dan J, K, L merupakan titik potong diagonalnya. Titik M, N dan O secara berturut-turut merupakan titik tengah ID, EF

dan GH . Titik P, Q, R, S, T dan U secara berturut-turut adalah titik tengah IA, AD, EB, BF, GC dan CH , maka $KO = PS$ dan $KO \perp PS$.



Gambar 19. Akibat bentuk lain kedua Teorema Van Aubel pada segitiga

Bukti: Berdasarkan persamaan (8) dan (19) jelas bahwa $KO = PS$. Lalu, dari persamaan (10) serta persamaan (26), jelas bahwa $KO \perp PS$. Sehingga terbukti $KO = PS$ dan $KO \perp PS$. ■

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan didapatkan beberapa antara lain terdapat bentuk lain dari teorema Van Aubel pada yaitu adanya tiga pasang garis yang sejajar dan sama panjang, sehingga menghasilkan tiga jajar genjang, serta terdapat tiga pasang garis yang tegak lurus dan sama panjang. Konsekuensi dari hal ini adalah terbentuknya tiga pasang garis yang tegak lurus dan panjang yang lain.

REFERENSI

- [1] Alsina C. dan Nelsen R. B. *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*. Washington DC: The Mathematical Association of America, 2010.
- [2] Baharuddin A., Mashadi., Saleh H. dan Hasriati. Modifikasi Teorema Van Aubel pada Segitiga, *Jurnal Matematis Paedagogic*, Vol 7, 111-118, 2017
- [3] Gardner M. *Mathematical Circus*. Washington DC: The Mathematical Association of America, 1992.
- [4] Glaister P. A Van Aubel Theorem Revisited, *Applied Probability Trust*, 33-36, 2015.

- [5] Januarti P., Mashadi, Sri G. dan Hasriati. Some Result on Excircle of Quadrilateral, *JP Journal of Mathematics Sciences*, Vol14, 41-56, 2015.
- [6] Krishna D. N. V. A New Consequence of Van Aubel's Theorem, *Department of Mathematic*, 1-9, 2016.
- [7] Mashadi. *Geometri Lanjut*. Pekanbaru: Unri Press, 2015.
- [8] Mashadi. *Pengajaran Matematika*. Pekanbaru: UR Press, 2016.
- [9] Mulyadi., Mashadi., Habibi S. dan Hasriati. Pengembangan Teorema Van Aubel pada Segienam, *Jurnal Mathematic Paedagogic*, Vol 1, 119-128, 2017.
- [10] Nishiyama, Y. The Beautiful Geometri theorem of Van Aubel, *International Journal of Pureand Applied Mathematic*, Vol1, 71-80, 2011.
- [11] Patrascu I. dan Smarandache F. Pantazi's Theorem Regarding the Biorthological Triangles, *Smarandache Nations Jaournal*, Vol 1, 1-5, 2010.
- [12] Patrascu I. dan Smarandache F. A Theorem about Simultaneous Orthological and Homological Triangles, *Smarandache Nations Jaournal*, Vol 1, 1-13, 2010.
- [13] Valentika C., Mashadi. dan Sri G. The Development of Napoleon's Theorem on Quadrilateral with Congruence and Trigonometry, *Bulletin of Mathematics*, Vol 8, 97-108, 2016.
- [14] Valentika C., Mashadi. dan Sri G. Development of Napoleon's Theorem on the Rectangles in Case of Inside Direction, *International Journal of Theoretical and Applied Mathematics*, Vol 3, 54-57, 2017.
- [15] Villiers M. D. Generalizing Van Aubel Using Duality, *Mathematic Magazine*, Vol 4, 303-307, 2000.
- [16] Zukrianto., Mashadi. dan Sri G. A Nonconvex Quadrilateral and Semi Gergonne Points on It: Some Result and Analysis, *Fundamental Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol 6, 111-124, 2016.