PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA GRAF PETERSEN YANG DIPERUMUM

Johan Wijaya Simangunsong[1], Mulyono[2]
[1]Mahasiswa Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan
Email : johansimangunsong22@yahoo.co.id
[2]Jurusana Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan

ABSTRAK

Misalkan G adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V = V(G)$ dan himpunan sisi $E = E(G)$. Suatu ***pelabelan total titik ajaib*** *(vertex-magic total labeling) pada graf $G(V,E)$ adalah pemetaan bijektif λ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan integer $\{1,2,3,\dots,V+E\}$ sedemikian sehingga terdapat bilangan bulat positif k yang memenuhi $\lambda(x) + \Sigma\, \lambda(xy) = k$ untuk setiap $x, y \in V$. Selanjutnyak disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf total titik ajaib. Hasil kajian menyatakan bahwa untuk graf Petersen $4P(n,m)$ memiliki bilangan konstanta ajaib $k = 39n + 2$ untuk Teorema 4.1.1(a) dan $k = 40n + 2$ untuk Teorema 4.1.1(b), untuk graf Petersen $5P(n,m)$ memiliki bilangan konstanta ajaib $k = 49n + 2$ untuk Teorema4.2.1(a) dan $k = 50n + 2$ Teorema4.2.1(b)dan untuk graf Petersen $6P(n,m)$ memiliki bilangan konstanta ajaib $k = 59n + 2$ untuk Teorema 4.3.1(a) dan $k = 60n + 2$ Teorema 4.3.1(b). Sehingga graf Petersent $P(n,m)$ untuk $4 \le t \le 6$ dapat dikenakan pelabelan total titik ajaib.*

Kata kunci: *Bilangan Konstanta Ajaib, Graf Petersen, Pelabelan Total Titik Ajaib.*

ABSTRACT

Suppose G is a graph with set point $V = V(G)$ and the set of the $E = E(G)$. A total labeling magic point (vertex-magic total labeling) on a graph $G(V,E)$ is a bijective mapping λ of $V \cup E$ to the set of integers $\{1,2,3,\dots,V+E\}$ such that there are integers positive k that satisfies $\lambda(x) + \Sigma\, \lambda(xy) = k$ for every $x, y \in V$. Furthermore, so-called magic constant k in graph G and G-called magic point total. Results of the study stated that for graph Petersen $4P(n,m)$has a magic constant number $k = 39n + 2$ to Theorem 4.1.1 (a) and $k = 40n + 2$ to Theorem 4.1.1 (b), to graph Petersen $5P(n,m)$ has a magic constant number $k = 49n + 2$ to Theorem 4.2.1 (a) and $k = 50n + 2$Theorem 4.2.1 (b) and for the Petersen graph $6P(n,m)$ has a magic constant number $k = 59n + 2$ to Theorem 4.3.1 (a) and $k = 60n + 2$ Theorem 4.3.1 (b). So the graph Petersen $tP(n,m)$ for $4 \le t \le 6$ may be subject to labeling magic point total.

Keywords: *Magic Numbers Constants, Graph Petersen, Labeling Total Point Magic.*

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Saat itu dia memikirkan untuk menyeberangi semua jembatan di kota Kaliningrad, Rusia, tepat satu kali dan kembali ketempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dikenal dengan teori graf. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàck (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970).Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yangdisebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super. Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik.

Pada sistem pengaturan frekuensi radio, permintaan yang besar atas pelayanan wireless dan terbatasnya frekuensi yang tersedia memerlukan penggunaan yang efisien. Masalah yang muncul adalah bagaimana agar gelombang sinyal yang digunakan dapat efisien dan tidak terjadi interferensi. Topik pengoptimalan label pada graf sedemikian hingga membuat setiap bobot titiknya berbeda, dipelajari melalui *Total Vertex Strenght (TVS)*, pada sistem pengaturan frekuensi radio, *tvs* dapat berupa jarak terkecil yang memungkinkan dua pemancar untuk melakukan transmisi data tanpa mengalami interferensi. Salah satu graf yang dapat diaplikasikan pada sistem pengaturan frekuensi radio adalah generalisasi graf petersen.

Terdapat beberapa macam graf yang dapat dikaji untuk dikenai pelabelan total titik ajaib, dalam penulisan skripsi ini graf dipilih adalah graf *Petersen*. Ini dikarenakan Graf *Petersen* merupakan graf lengkap yang saling isomorfik dan tidak terhubung sehingga lebih mudah dalam melakukan pelabelan. Graf *Petersen* juga merupakan graf yang telah diperumum dan dinyatakan sebagai $P(n,m)$ dengan nilai n menyatakan banyaknya simpul luar (sama dengan banyak simpul dalam) dan nilai m menyatakan lompatan busur dalam, dimana $n \geq 3 dan 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ dan merupakan graf yang terdiri dari himpunan titik dan himpunan sisi. Graf *Petersen* yang diperumum pertama kali di definisikan oleh Watkins, dengan memuat sebanyak t buah graf *Petersen* yang dapat dinyatakan dengan $tP(n,m)$ yang mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah studi literatur. Literatur yang digunakan erat kaitannya dengan persoalan yang telah didefinisikan sebelumnya.

Langkah-Langkah Penelitian

Dalam menyajikan tulisan ini, penulis menyusun suatu kerangka penelitian yang didasarkan pada langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menyajikan definisi dari graf,
   Pada tahapan ini akan disajikan uraian singkat mengenai teori graf.
2. Menyajikan terminologi dasar graf,
   Pada tahapan ini disajikan pengertian ataupun definisi mengenai berdekatan

(*adjasent*), bersisian (*incident*), derajat (*degree*), jalan (*walk*), jejak (*trail*), lintasan (*path*), terhubung (*connected*), tak terhubung (*disconnected*), dan subgraf.

3. Menyajikan jenis-jenis graf,
4. Menyajikan graf sederhana khusus yang digunakan,
5. Menyajikan representasi graf dalam bentuk matriks,
6. Menyajikan definisi persegi ajaib,
7. Menyajikan definisi faktorisasi graf,
8. Menyajikan definisi pemetaan,
   Pada tahapan ini disajikan pengertian pemetaan injektif (satu ke satu), surjektif (fungsi pada) dan bijektif (korespondensi satu-satu).
9. Menyajikan definisi pelabelan dan definisi pelabelan total titik ajaib.
10. Menentukan pelabelan total titik ajaib pada graf Petersen *tP(n,m)* untuk $4 \leq t \leq 6$ (Gambar 3.1).
11. Menarik kesimpulan dan saran dari penelitian yang dilakukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pelabelan Graf

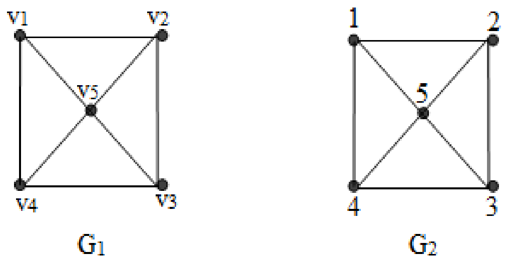
Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan setiap bagian-bagian dari graf (titik, sisi dan keduanya) dengan menggunakan suatu bilangan (bilangan yang digunakan adalah bilangan bulat positif) (Miller dkk, 2005:2). Marr dan Wallis (2013:3) juga menjelaskan bahwa pelabelan pada graf adalah pemetaan himpunan dari setiap bagian-bagian graf (himpunan titik, himpunan sisi, himpunan titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif.

Jenis-jenis Pelabelan Graf

Pada umumnya jenis-jenis pelabelan pada graf yang dikenal adalah pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pelabelan ajaib dibagi menjadi beberapa jenis yaitu pelabelan total titik ajaib, pelabelan total sisi ajaib, pelabelan total titik ajaib super, dan pelabelan total sisi ajaib super, sedangkan pada pelabelan anti ajaib terdapat pelabelan total titik anti ajaib dan pelabelan total sisi anti ajaib. Berdasarkan domainnya pelabelan graf dibagi menjadi tiga jenis yaitu Pelabelan Titik, Pelabelan Sisi, Pelabelan Total. Namun, penulisan skripsi ini hanya akan membahas pelabelan total titik ajaib *(vertex magic total labeling)*.

a. Pelabelan Titik

Marr dan Wallis (2013:3) berpendapat bahwa Pelabelan Titik merupakan suatu pemetaan jika domainnya berupa himpunan titik. Jika diberikan suatu graf G yang memiliki himpunan titik $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ dengan $v \rightarrow i, i \in Z^{+}$.

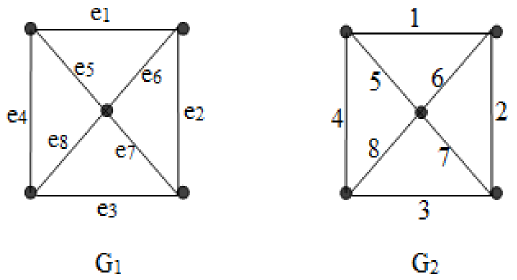


Gambar 2.11 Graf Pelabelan Titik

Pada Gambar 2.11 terdapat dua buah graf yaitu graf G_1 dan G_2. Dimana graf G_1 belum berlaku pelabelan titik, sedangkan pada graf G_2 sudah berlaku pelabelan titik pada graf dengan menggunakan bilangan bulat positif.

b. Pelabelan Sisi

Pelabelan Sisi merupakan suatu pemetaan jika domainnya berupa himpunan sisi. Jika diberikan suatu graf G yang memiliki himpunan sisi $f: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dengan $e \rightarrow i, i \in Z^{+}$.

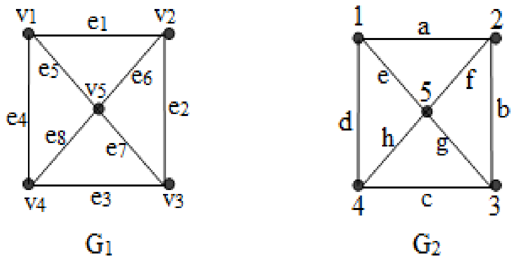


Gambar 2.12 Graf Pelabelan Sisi

Pada Gambar 2.12 terdapat dua buah graf yaitu graf G_1 dan G_2. Dimana graf G_1 belum berlaku pelabelan sisi, sedangkan pada graf G_2 sudah berlaku pelabelan sisi pada graf dengan menggunakan bilangan bulat positif.

c. Pelabelan Total

Pelabelan Total merupakan suatu pemetaan jika domainnya berupa himpunan titik dan sisi. Jika diberikan suatu graf G yang memiliki himpunan titik$f: V(G) \to \{1,2,3,4,5\}$dan himpunan sisi$f: E(G) \to \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$sehingga pelabelan total dinotasikan dengan:$f: V(G) \cup E(G) \to \{1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, f, g, h\}$

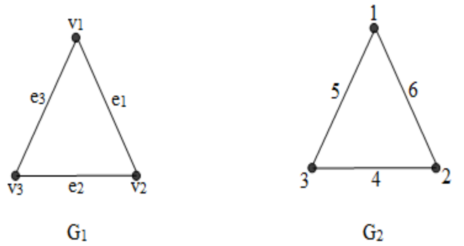


Gambar 2.13 Graf Pelabelan Total

Pada Gambar 2.13 terdapat dua buah graf yaitu graf G_1 dan G_2. Dimana graf G_1 belum berlaku pelabelan total, sedangkan pada graf G_2 sudah berlaku pelabelan total pada graf dengan gabungan pelabelan sisi dan pelabelan titik.

d. Pelabelan Total Titik Ajaib

Terdapat suatu graf G yang memiliki himpunan $V = V(G)$ dan himpunan sisi $E = E(G)$ dimana $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$ diberikan suatu fungsi satu-satu dan fungsi pada dengan pemetaan yang menggunakan bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, v + e\}$ sehingga untuk setiap titik v berlaku $f(v) + \Sigma f(ve) = k$ dimana setiap titik v dan e saling terhubung serta k adalah bilangan konstanta ajaib dari fungsi tersebut (Slamin dkk, 2006:147).



Gambar 2.14 Graf Pelabelan Total Titik Ajaib

Dari Gambar 2.14 merupakan contoh pelabelan total titik ajaib karena dari gambar tersebut dapat diperoleh :

$$f(v_1) + f(e_1) + f(e_3) = 1 + 6 + 5 = 12$$

$$f(v_2) + f(e_1) + f(e_2) = 2 + 6 + 4 = 12$$

$$f(v_3) + f(e_3) + f(e_2) = 1 + 6 + 5 = 12$$

Dari perhitungan tersebut maka didapatkan nilai k = 12.

Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $tP(n, m)$untuk $1 \leq t \leq 3$

Di bagian ini akan diberikan pembuktian teorema-teorema serta penelitian terdahulu yang berkaitan dengan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$. Teorema tersebut merupakan dasar teorema yang akan digunakan.

Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen P(n,m)*

Dalam Slamin dkk (2006:2) menjelaskan bahwa untuk melakukan pelabelan total titik ajaib pada setiap graf *Petersen* $P(n,\ m)$ maka harus memenuhi dua teorema yaitu :

a) Teorema 2.9.1 (a)

Untuk $n \geq 3, 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, setiap graf Petersen yang diperumum *P(n,m)* dapat dikatakan pelabelan total titik ajaib apabila memiliki bilangan konstanta ajaib yaitu $k = 9n + 2$ (Bača, Miller dan Slamin).

Bukti :

Adapun cara pelabelan adalah sebagai berikut :

$\lambda_1(u_i) \quad =(4n+1)\alpha(i,0)+(5n+1-i)\alpha(1,i)$

$\lambda_1(v_i) \quad =(2n+m-1)\alpha(i,m-1)+(3n+m-i)\alpha(m,i)$

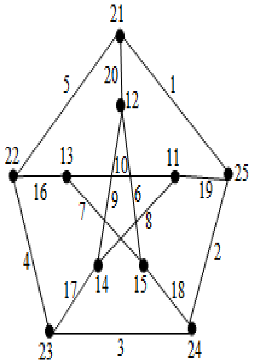
$\lambda_1(u_iu_{i+1}) \quad =1+i$

$\lambda_1(u_iv_i) \quad =4n-i$

$\lambda_1(v_iv_{i+m}) \quad =n+1+i$

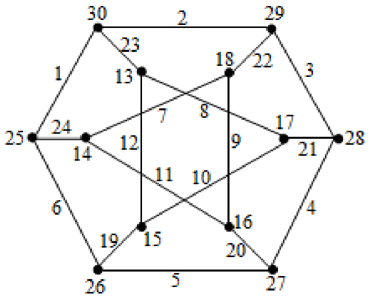
Untuk $i \in I=\{0,1,\dots,n-1\}$ dimana :

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1\ jika\ x\le y\\0\ jika\ x>y\end{cases}$$



Gambar 2.15 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen P(5,2)*

Gambar 2.15 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $P(5,2)$ dengan k = 9n + 2 = 9.5 + 2 = 47



Gambar 2.16 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen P(6,2)*

Gambar 2.16 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $P(6,2)$ dengan k = 9n + 2 = 9.6 + 2 = 56

b) Teorema 2.9.1 (b)

Untuk $n\ge 3, 1\le m \le \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$, setiap graf Petersen yang diperumum *P(n,m)* dapat dikatakan pelabelan total titik ajaib apabila memiliki bilangan konstanta ajaib yaitu $k=\ 10n+2$ (Bača, Miller dan Slamin).

Bukti :

Adapun cara pelabelan adalah sebagai berikut :

$\lambda_2(u_i) \quad =(4n+1)\alpha(i,0)+(5n+1-i)\alpha(1,i)$

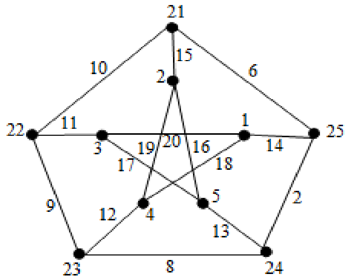
$\lambda_2(v_i) \quad =(m-1)\alpha(i,m-1)+(n+m-i)\alpha(m,i)$

$\lambda_2(u_iu_{i+1}) \quad =n+1+i$

$\lambda_2(u_iv_i) \quad =3n-i$

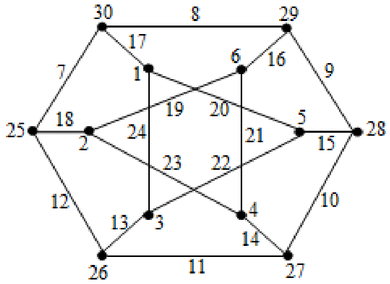
$\lambda_2(v_iv_{i+m}) \quad =3n+1+i$

Untuk $i \in I=\{0,1,\dots,n-1\}$ dimana :$\alpha(x,y)=\begin{cases}1\ jika\ x\le y\\0\ jika\ x>y\end{cases}$



Gambar 2.17 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen P(5,2)*

Gambar 2.17 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $P(5,2)$ dengan k = 10n + 2 = 10.5 + 2 = 52



Gambar 2.18 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen P(6,2)*

Gambar 2.18 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $P(6,2)$ dengan k = 10n + 2 = 10.6 + 2 = 62.

Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen 2P(n,m)*

a) Teorema 2.9.2 (a)

Untuk $n\ge 3, 1\le m \le \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$, 2 buah graf Petersen yang diperumum *2P(n,m)* dapat dikatakan pelabelan total titik ajaib apabila memiliki bilangan konstanta ajaib yaitu $k=\ 19n+2$ (Slamin dkk, 2006 vol 2).

Bukti :

Untuk melakukan pelabelan pada *2P(n,m)* yang dapat menggunakan cara berikut:

$\lambda(u_i^j) \quad = (4n+1)\alpha(i,0) + (5n+1-i)\alpha(1,i) + (j-1)5n$

$\lambda(v_i^j) \quad = (2n+m-1)\alpha(i,m-1) + (3n+m-i)\alpha(m,i) + (j-1)5n$

$\lambda(u_i^j u_{i+1}^j) \quad = 1+i+(2-j)5n$

$\lambda(u_i^j v_i^j) \quad = 4n-i+(j-1)5n$

$\lambda(v_i^j v_{i+m}^j) \quad = n+1+i+(2-j)5n$

Untuk $j = 1,2$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$

dimana: $\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \; jika \; x \le y \\ 0 \; jika \; x > y \end{cases}$

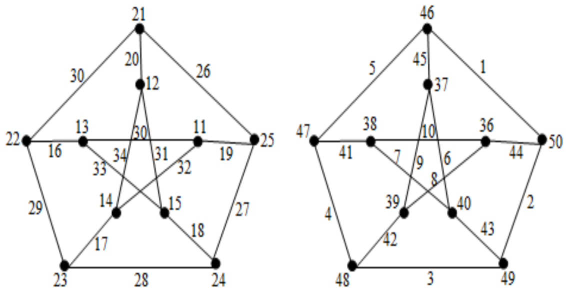
Kemudian untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari *2P(n,m)* adalah sebagai berikut :

$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j sebagai berikut :

$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$

untuk $j = 1,2$ dan $i \in Z_n$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n.



Gambar 2.19 Pelabelan Total Titik Ajaib graf *Petersen 2P(5,2)*

Gambar 2.19 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $2P(5,2)$ dengan k = 19n + 2 = 19.5 + 2 = 97.

Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen 3P(n,m)*

a) Teorema 2.9.3

Untuk $n \ge 3, 1 \le m \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 3 buah graf Petersen yang diperumum 3*P(6,2)* dapat dikatakan pelabelan total titik ajaib apabila memiliki bilangan konstanta ajaib yaitu $k = 29n + 2$.

Bukti :

Adapun pelabelannya adalah sebagai berikut :

$\lambda(u_i^j) \quad = (4n+1)\alpha(i,0) + (5n+1-i)\alpha(1,i) + (j-1)5n$

$\lambda(v_i^j) \quad = (2n+m-1)\alpha(i,m-1) + (3n+m-i)\alpha(m,i) + (j-1)5n$

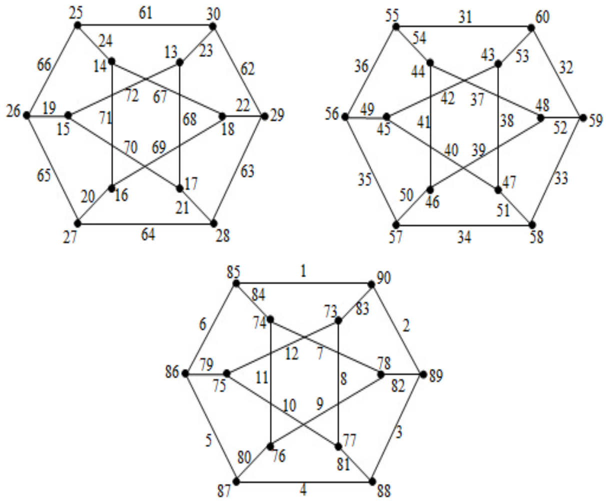
$\lambda(u_i^j u_{i+1}^j) \quad = 1+i+(3-j)5n$

$\lambda(u_i^j v_i^j) \quad = 4n-i+(j-1)5n$

$\lambda(v_i^j v_{i+m}^j) = n+1+i+(3-j)5n$

Bila perlu indeksnya direduksi modulo n untuk $j = 1,2,3$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$

dimana: $\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \; jika \; x \le y \\ 0 \; jika \; x > y \end{cases}$



Gambar 2.20 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen 3P(6,2)*

Gambar 2.20 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $3P(6,2)$ dengan $k = 29n + 2 = 29.6 + 2 = 176$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari *3P(6,2)* adalah sebagai berikut :

$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari *3P(6,2)* sebagai berikut :

$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$

untuk $j = 1,2,3$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n. Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 29n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 29n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $3P(6,2)$.

b) Teorema 2.9.3

Untuk $n \geq 3, 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 3 buah graf Petersen yang diperumum *3P(6,2)* dapat dikatakan pelabelan total titik ajaib apabila memiliki bilangan konstanta ajaib yaitu $k = 30n + 2$.

Bukti :

Adapun pelabelannya adalah sebagai berikut :

$$\lambda(u_i^j) = (4n+1)\alpha(i,0) + (5n+1-i)\alpha(1,i) + (j-1)5n$$

$$\lambda(v_i^j) = (m-i)\alpha(i,m-1) + (n+m-i)\alpha(m,i) + (j-1)5n$$

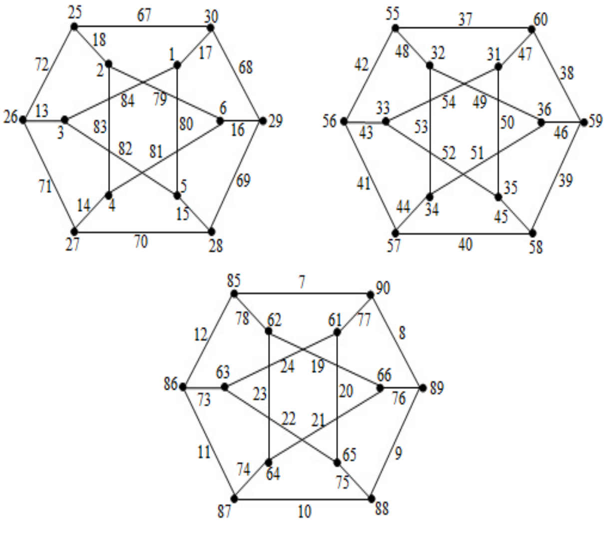
$$\lambda(u_i^j u_{i+1}^j) = n+1+i+(3-j)5n$$

$$\lambda(u_i^j v_i^j) = 3n - i + (j-1)5n$$

$$\lambda(v_i^j v_{i+m}^j) = 3n+1+i+(4-j)5n$$

Bila perlu indeksnya direduksi modulo n untuk $j = 1,2,3$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$

dimana: $\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \; jika \; x \leq y \\ 0 \; jika \; x > y \end{cases}$



Gambar 2.21 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen 3P(6,2)*

Gambar 2.21 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $3P(6,2)$ dengan $k = 30n + 2 = 30.6 + 2 = 182$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari *3P(6,2)* adalah sebagai berikut :

$$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari *3P(6,2)* sebagai berikut :

$$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$$

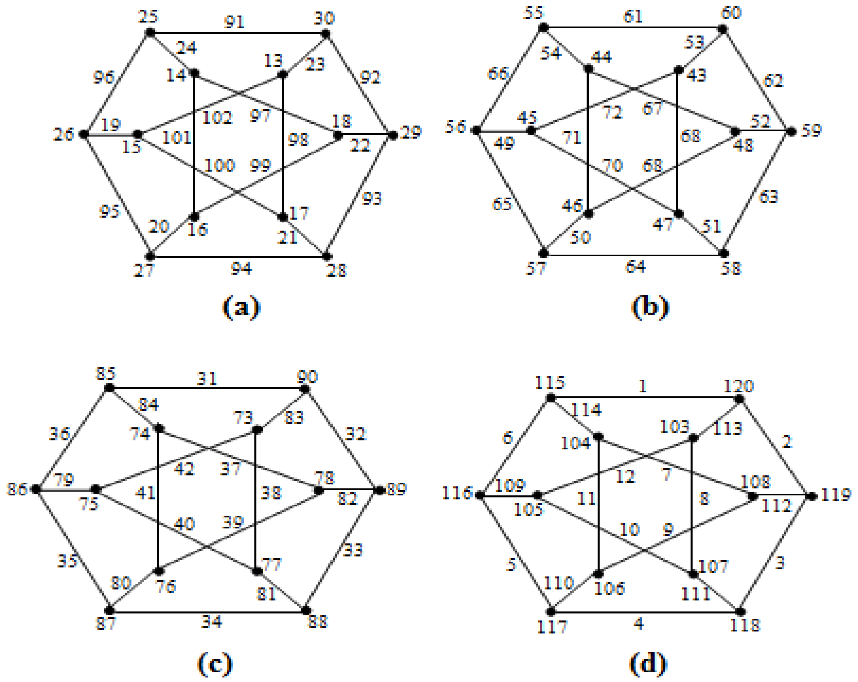
untuk $j = 1,2,3$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n. Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 30n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 30n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $3P(6,2)$.

Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $4P(n,m)$

Menentukan Nilai Konstanta Ajaib pada Graf *Petersen* $4P(6,2)$

Hasil Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $4P(6,2)$

a) Berdasarkan Teorema 4.1.1(a), maka pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $4P(6,2)$ dengan bilangan konsanta ajaib $k = 39n + 2 = 39.6 + 2 = 236$ adalah sebagai berikut :



Gambar 4.6 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* 4P(6,2) dengan k = 39n + 2

Gambar 4.6 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $4P(6{,}2)$ dengan $k = 39n + 2 = 39.6 + 2 = 236$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari *4P(6,2)* adalah sebagai berikut :

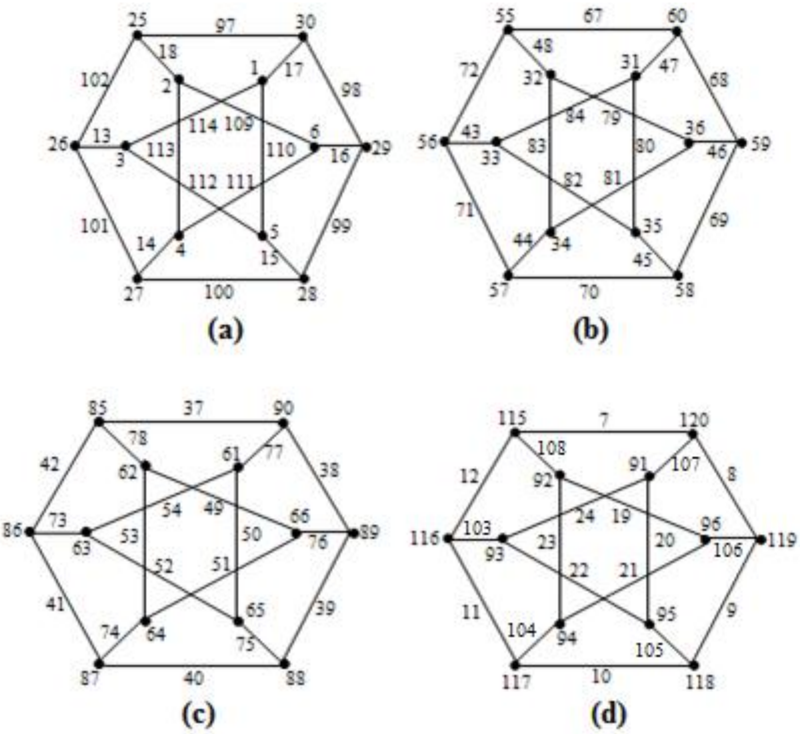
$$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari *4P(6,2)* sebagai berikut :

$$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$$

untuk $j = 1,2,3,4$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n. Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 39n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 39n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $4P(6{,}2)$.

b) Berdasarkan Teorema 4.1.1(b), maka pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $4P(6{,}2)$ dengan bilangan konsanta ajaib $k = 40n + 2 = 40.6 + 2 = 242$ adalah sebagai berikut :



Gambar 4.7 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* 4P(6,2) dengan k = 40n +2

Gambar 4.7 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $4P(6,2)$ dengan $k = 40n + 2 = 40.6 + 2 = 242$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari 4*P(6,2)* adalah sebagai berikut :

$$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari 4*P(6,2)* sebagai berikut :

$$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$$

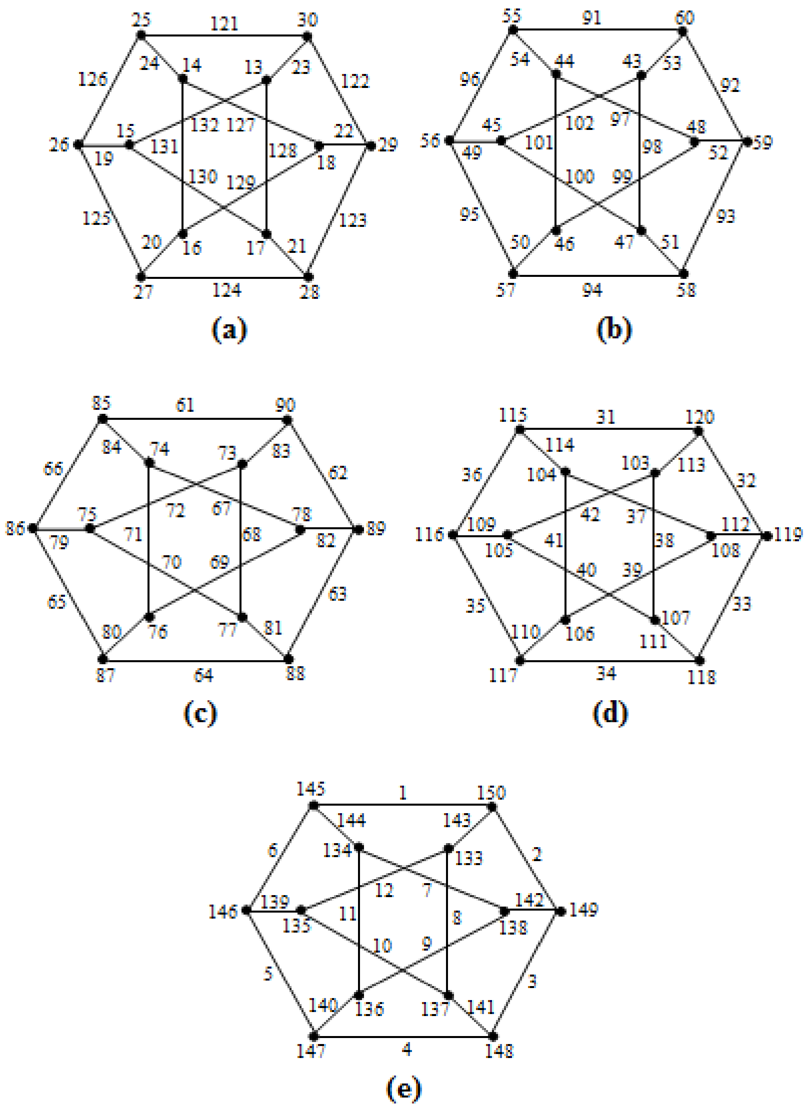
untuk $j = 1,2,3,4$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n.Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 40n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 40n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $4P(6,2)$.

Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $5P(n,m)$

Menentukan Nilai Konstanta Ajaib pada Graf *Petersen*$5P(6,2)$

Hasil Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $5P(6,2)$

a) Berdasarkan Teorema 4.2.1(a), maka pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $5P(6,2)$ dengan bilangan konsanta ajaib $k = 49n + 2 = 49.6 + 2 = 296$ adalah sebagai berikut :



Gambar 4.8 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* 5*P*(6,2) dengan k = 49n + 2

Gambar 4.8 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $5P(6,2)$ dengan $k = 49n + 2 = 49.6 + 2 = 296$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari 5*P(6,2)* adalah sebagai berikut :

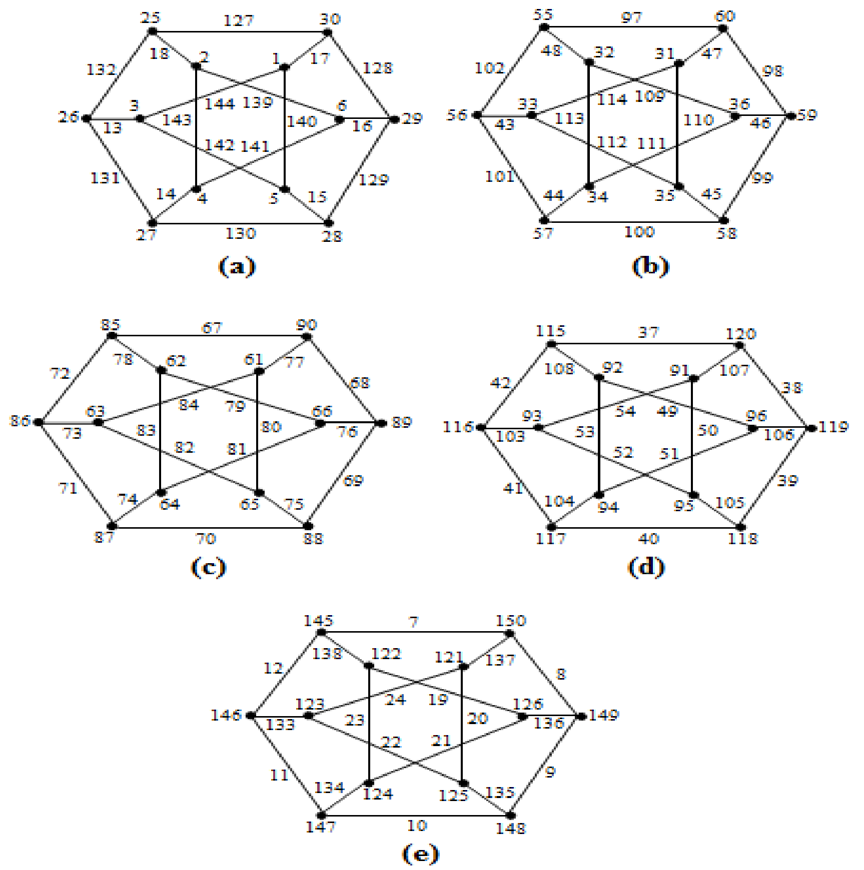
$$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari 5*P(6,2)* sebagai berikut :

$$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$$

untuk $j = 1,2,3,4,5$ dan $i \in I = \{0,1,\dots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n. Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 49n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 49n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $5P(6,2)$.

b) Berdasarkan Teorema 4.2.1(b), maka pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $5P(6,2)$ dengan bilangan konsanta ajaib $k = 50n + 2 = 50.6 + 2 = 302$ adalah sebagai berikut :



Gambar 4.9 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* 5*P*(6,2) dengan k = 50n + 2

Gambar 4.9 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $5P(6{,}2)$ dengan $k = 50n + 2 = 50.6 + 2 = 302$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari 5*P(6,2)* adalah sebagai berikut :

$$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari 5*P(6,2)* sebagai berikut :

$$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$$

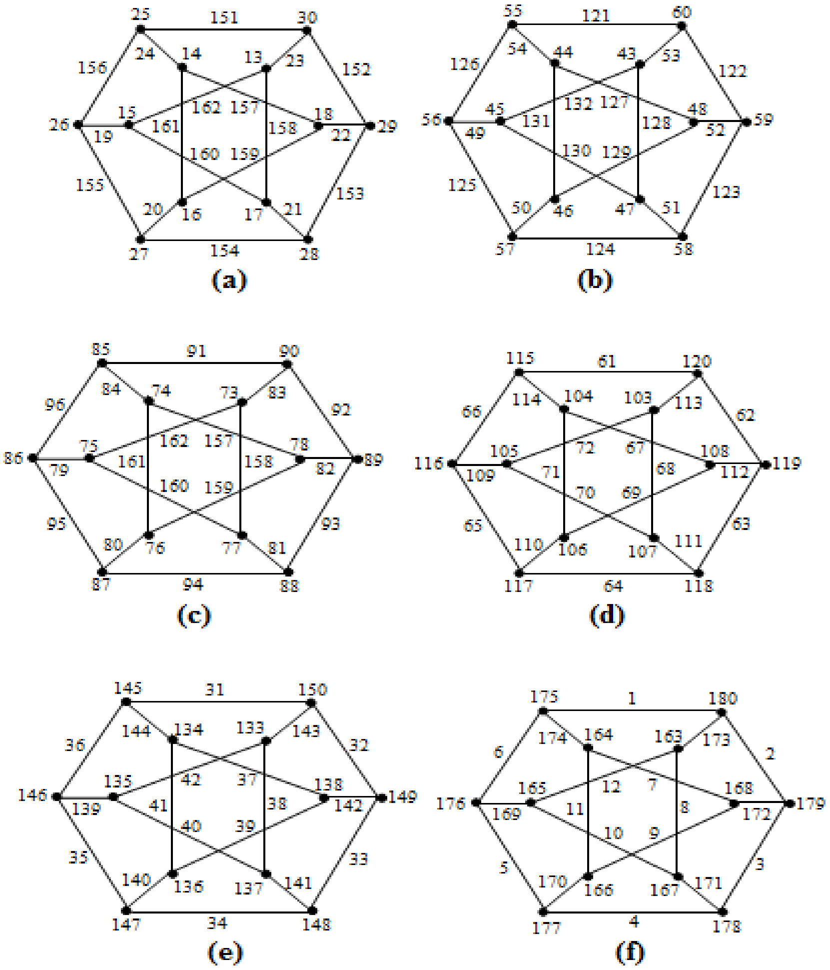
untuk $j = 1,2,3,4,5$ dan $i \in I = \{0,1,\ldots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n. Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 50n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 50n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $5P(6{,}2)$.

Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $6P(n,m)$

Menentukan Nilai Konstanta Ajaib pada Graf *Petersen* $6P(6,2)$

Hasil Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $6P(6,2)$

a) Berdasarkan Teorema 4.3.1(a), maka pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $6P(6{,}2)$ dengan bilangan konsanta ajaib $k = 59n + 2 = 59.6 + 2 = 356$ adalah sebagai berikut :



Gambar 4.10 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* 6*P*(6,2) dengan k = 59n + 2

Gambar 4.10 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $6P(6,2)$ dengan $k = 59n + 2 = 59.6 + 2 = 356$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari 6*P(6,2)* adalah sebagai berikut :

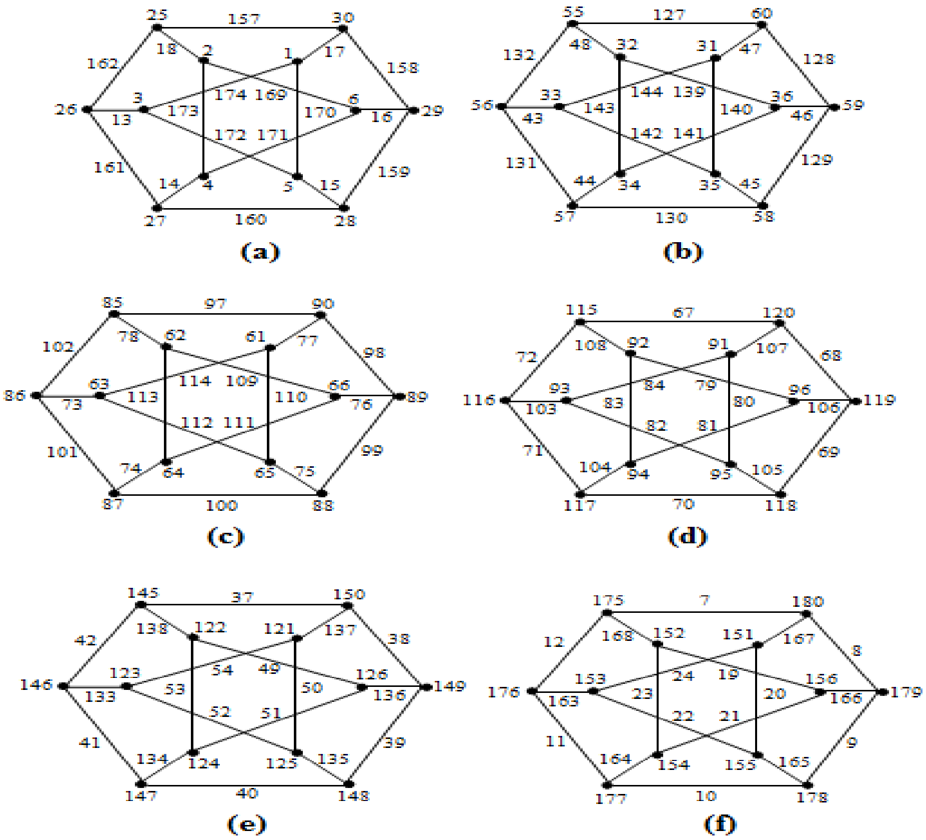
$$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari 6*P(6,2)* sebagai berikut :

$$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$$

untuk $j = 1,2,3,4,5,6$ dan $i \in I = \{0,1,\ldots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n. Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 59n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 59n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $6P(6,2)$.

b) Berdasarkan Teorema 4.3.1(b), maka pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $6P(6,2)$ dengan bilangan konsanta ajaib $k = 60n + 2 = 60.6 + 2 = 362$ adalah sebagai berikut :



Gambar 4.11 Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf *Petersen* $6P(6,2)$ dengan $k = 60n + 2$

Gambar 4.11 merupakan pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $6P(6,2)$ dengan $k = 60n + 2 = 60.6 + 2 = 362$.

Untuk menunjukkan pelabelan titik u_i^j dari 6*P(6,2)* adalah sebagai berikut :

$$w\lambda(u_i^j) = \lambda(u_i^j) + \lambda(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{i-1}^j u_i^j)$$

Dan untuk pelabelan titik v_i^j dari 6*P(6,2)* sebagai berikut :

$$w\lambda(v_i^j) = \lambda(v_i^j) + \lambda(v_i^j v_{i+m}^j) + \lambda(u_i^j v_i^j) + \lambda(u_{n+i-m}^j v_i^j)$$

untuk $j = 1,2,3,4,5,6$ dan $i \in I = \{0,1,\ldots,n-1\}$ dimana semuanya merupakan indeks dari modulo n. Sehingga terbukti $w\lambda(u_i^j) = 60n + 2$ dan $w\lambda(v_i^j) = 60n + 2$ sehingga bilangan konstanta ajaib dari graf Petersen $6P(6,2)$.

KESIMPULAN DAN SARAN

SARAN

Berdasarkan hasil kajian mengenai pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \le t \le 6$ dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Bentuk pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \le t \le 6$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi, namun yang membedakan pola-pola tersebut pada graf *Petersen* $4P(n,m)$, graf *Petersen* $5P(n,m)$, dan graf *Petersen* $6P(n,m)$ terletak pada langkah pola yang ketiga $\lambda(u_i^j u_{i+1}^j) = n + 1 + i + (t-j)5n$ dan langkah pola yang kelima $\lambda(v_i^j v_{i+m}^j) = 3n + 1 + i + (t-j)5n$.
2. Bilangan konstanta ajaib berturut-turut sebagai berikut :

a. Untuk graf *Petersen* $tP(n,m)$ dengan $t = 4$ didapatkan bilangan konstanta ajaib $k = 39n + 2$ untuk Teorema

4.1.1(a) dan $k = 40n + 2$ Teorema 4.1.1(b).

b. Untuk graf *Petersen* $tP(n,m)$ dengan $t = 5$ didapatkan bilangan konstanta ajaib $k = 49n + 2$ untuk Teorema 4.2.1(a) dan $k = 50n + 2$ Teorema 4.2.1(b).

c. Untuk graf *Petersen* $tP(n,m)$ dengan $t = 6$ didapatkan bilangan konstanta ajaib $k = 59n + 2$ untuk Teorema 4.3.1(a) dan $k = 60n + 2$ Teorema 4.3.1(b).

Saran

Pelabelan dari sebuah graf merupakan suatu permasalahan yang memiliki cakupan masalah cukup luas. Sehingga penelitian mengenai pelabelan graf masih dapat dilakukan pada jenis-jenis pelabelan lainnya seperti pelabelan graceful (*graceful labeling*), pelabelan harmoni (*harmonious labeling*), pelabelan sisi ajaib dan anti-ajaib (*edge-magic and adge-antimagic labeling*), dan pelabelan titik ajaib dan anti-ajaib (*vertex-magic and vertex-antimagic labeling*) serta peneliti selanjutnya dapat meneliti dengan t yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press

[2] Aldous, Joan M and Robin J. Wilson. 2004. *Graph and Applications: an Introductory Approach*. Great Britian: Springer

[3] Ali, Gohar. 2005. *Graph Labelings*. Abdus Salam School of Mathematical Sciences GC University Lahore: Pakistan

[4] C. Balbuena, E. Barker, K. C. Das, Y. Lin, M. Miller, J. Ryan, Slamin, K. Sugeng, M. Tkac. *On the degrees of a super vertex-magic graph*. Discrete Mathematics **306**(2006) 539-559.

[5] Chartand, G. And L. Lesniak. 2000. *Graph and Digraph 3rd Edition.* California: Wadsworth, Inc.

[6] Gallian, Joseph. A. 2012. *A Dynamic Survey of Graph Labeling.* The Electronical Journal of Combinatorics. Vol. 18 Tahun 2012. #DS6

[7] J. A. MacDougall, Mirka Miller, Slamin, W. D. Wallis, (2002) *Vertex-Magic Total Labeling of Graphs*, Utilitas Math **61:** 3-21

[8] J. A. MacDougall, Mirka Miller, K. Sugeng, *Super Vertex-Magic Total Labeling of Graphs*, Proc. 15th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms (2004)

[9] Lipschutz, Seymour & Marc Lipson. 2008. *Matematika Diskret*. Jakarta: Erlangga

[10] M. Baĉa, M. Miller and Slamin. Vertex-magic total labelings of generalized Petersen graphs. *Int. J. of Computer Mathematics* **79**. Issue **12**, (2002) 1259-1264

[11] M. E. Watkins. *A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs.* J. Combin. Theory **6** (1969) 152-164.

[12] Marr, A.M and Wallis, W.D. 2013. *Magic Graphs, DOI 10.1007/978-0-8176-8391-72.* New York: Springer Science+Business Media

[13] Miller, Baca, MacDougall. 2005. *Vertex-magic Total Labeling of Generalized Petersen Graphs and Convex Polytopes*

[14] Siang, JJ. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta

[15] Slamin, A.C. Prihandoko, T.B Setiawan, F. Rosita, B. Shaleh. 2006. *Vertex-Magic Total Labeling of Disconnected Graphs.* Journal of Prime Research in Mathematics, to appear.

[16] Vasudev, C. 2006. *Graph Theory with Applications.* New Delhi: New Age International Publisher.