KARISMATIKA - ISSN : 2442- 0366
TAHUN 1 VOL 1 NO. 2 AGUSTUS 2015

SEMI KUASA TITIK TERHADAP ELIPS

Arnidasari[1], Mashadi[2], Kartini[3]
[1,] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, Universitas Riau
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, Kampus Bina Widya, Simpang Baru, Pekanbaru, Riau 28293
Email: arnidasari21@yahoo.com
[2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Mipa, Universitas Riau
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, Kampus Bina Widya, Simpang Baru, Pekanbaru, Riau 28293
Email: mashadi..mat@gmail.com
Email: tin_baa@yahoo.com

ABSTRAK

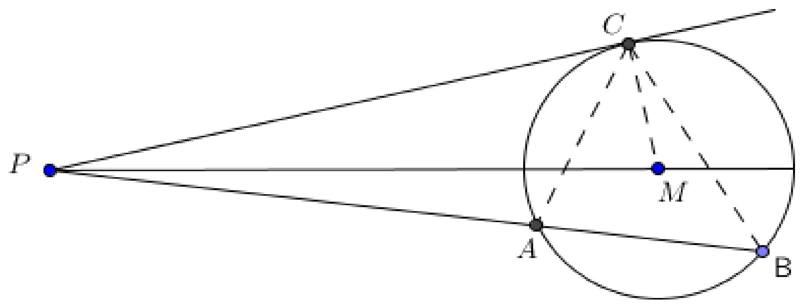
Kuasa titik tidak hanya dibahas pada lingkaran, tetapi kuasa titik juga dapat ditentukan dari irisan kerucut lain, yaitu elips. Pada tulisan ini dibahas mengenai cara menentukan semi kuasa titik terhadap elips khususnya semi kuasa titik yang berada di luar elips..
Kata kunci: *Semi kuasa titik, elips*

ABSTRACT

The power of point not only discussed in the circle, but it can also be determined from other conic sections, namely elips. In this paper discussed on how to determine the semi power of point on the elips especially in outside of elips.
Keywords: *Semi power of point, elips*

PENDAHULUAN

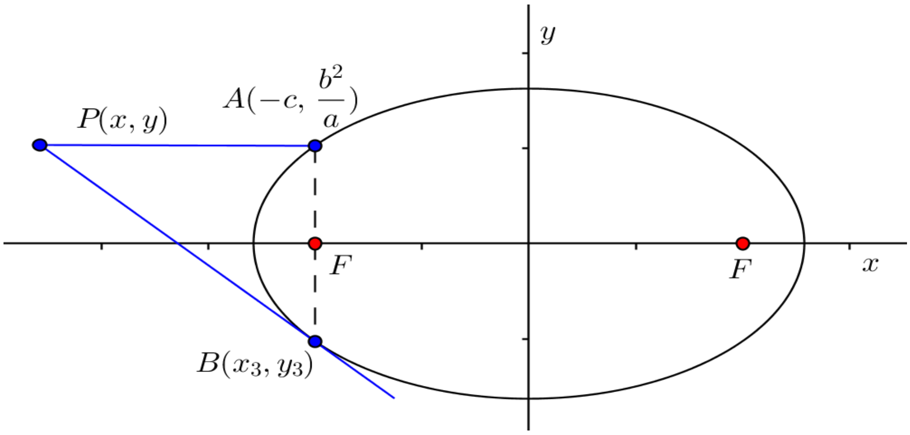
Kuasa titik terhadap lingkaran telah banyak dibahas di beberapa buku geometri. Perhatikan Gambar 1, misalkan *M* titik pusat suatu lingkaran dan *R* adalah jari-jari dari lingkaran tersebut, maka kuasa titik *P* terhadap lingkaran didefinisikan sebagai $PM^2 - R^2$ [2].



Gambar 1: Kuasa titik di luar lingkaran

Dari Gambar 1, terlihat bahwa nilai $PM^2 - R^2 = PC^2$ [3]. Sehingga kuasa titik *P* terhadap lingkaran sebenarnya merupakan kuadrat panjang garis singgung lingkaran dari titik *P* ke titik singgungnya.

Kuasa titik juga dapat ditentukan pada irisan kerucut lain, yaitu elips, dimana pada elips dinamakan sebagai semi kuasa titik. Berdasarkan teori kuasa titik terhadap lingkaran diketahui bahwa kuasa titiknya merupakan kuadrat panjang garis singgung suatu titik dengan lingkaran [1]. Sedangkan sifat dari garis singgung terhadap lingkaran adalah tegak lurus terhadap jari- jari lingkaran. Akan tetapi garis singgung pada elips tidak selalu tegak lurus terhadap *latus rectum* dan sumbu simetri.



.

Gambar 2: Garis singgung terhadap elips

Perhatikan Gambar 2, garis *PB* merupakan garis singgung terhadap elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dengan koordinat titik *latus rectum* adalah $\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$. Sehingga garis *PB* menyinggung *latus rectum* pada ordinat $y=\frac{b^2}{a}$, jika ordinat *y* tersebut disubstitusikan ke persamaan elips maka diperoleh

$$b^2x^2+b^4-a^2b^2=0$$

Sehingga diperoleh diskriminan dari persamaan kuadrat tersebut adalah

$$D=4b^2(a^2-b^4)$$

Nilai diskriminan *D* ini memiliki tiga kemungkinan nilai diskriminan *D* yakni *D > 0, D = 0* dan *D < 0.* Akibatnya garis *PA* memiliki kemungkinan memotong elips di titik *A* jika *D > 0* [Sehatta]. Sedangkan garis *PB* memiliki nilai diskriminan *D = 0* karena merupakan garis singgung pada elips.

Oleh karena itu, garis *PB* tidak sama dengan garis *PA* dan garis *PB* tidak selalu tegak lurus terhadap *latus rectum* serta pada sumbu simetri. Sehingga kedudukan titik $P(x,y)$ terhadap elips dinamakan dengan semi kuasa titik, karena tidak sesuai sifat tegak lurus terhadap *latus rectum* dan sumbu simetri pada elips.

Belum terdapat pembahasan mengenai semi kuasa titik terhadap elips. Oleh karena itulah pada artikel dibahas cara menentukan semi kuasa titik terhadap elips khususnya semi kuasa titik yang berada di luar elips.

METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu menggunakan definisi yang terdapat pada kuasa titik terhadap lingkaran. Selain itu, digunakan rumus jarak antara dua titik dalam menentukan nilai semi kuasa titik yang berada di luar elips.

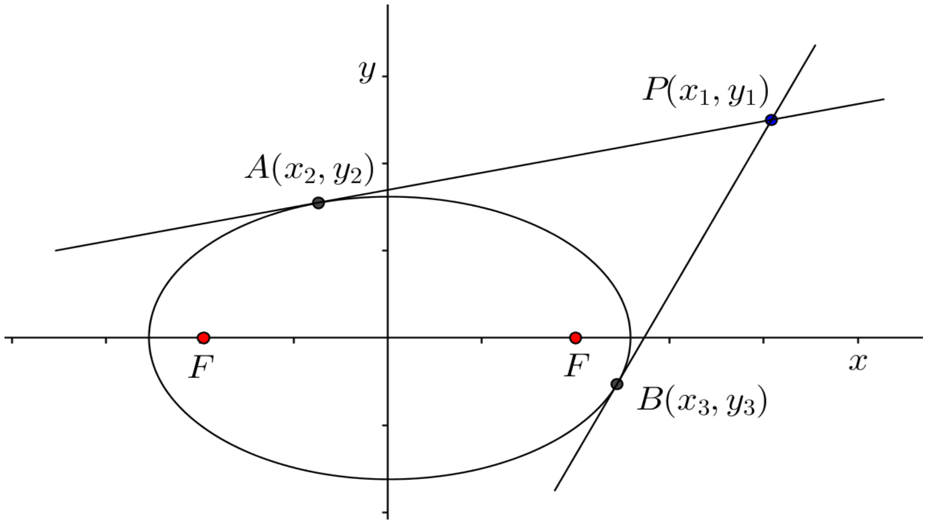
HASIL DAN PEMBAHASAN

Jika titik $P(x_1,y_1)$ berada di luar elips, maka secara umum dapat ditentukan nilai semi kuasa titik $P(x_1,y_1)$. Selain itu, ada kedudukan titik yang berada di luar elips yang dapat ditentukan nilai kuasa titiknya. Hal ini dikarenakan ada garis singgung elips yang tegak lurus terhadap sumbu simetri elips.

Semi Kuasa Titik $P(x_1,y_1)$ yang Berada di Luar Elips

Semi kuasa titik di luar elips menggunakan konsep yang sama dengan kuasa titik di luar lingkaran. Kuasa titik di luar lingkaran merupakan kuadrat panjang garis singgung dari suatu titik di luar lingkaran ke titik singgung lingkaran. Sehingga semi kuasa titik di luar elips ditentukan dengan menghitung kuadrat panjang garis singgung dari suatu titik di luar elips ke titik singgung elips.

Misalkan suatu titik $P(x_1, y_1)$ pada Gambar 1 terletak di luar elips dengan persamaan $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Jika ditarik garis yang menyinggung elips dari titik $P(x_1, y_1)$ diperoleh titik singgung $A(x_2, y_2)$ dan titik singgung $B(x_3, y_3)$. Akan ditentukan $|PA|^2$ dan $|PB|^2$ yang merupakan semi kuasa titik terhadap elips dengan menggunakan persamaan garis kutub.



Gambar 3: Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ di luar elips

Persamaan garis kutub elips

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$x_1 x b^2 + y_1 y a^2 = a^2 b^2$$

$$y_1 y a^2 = a^2 b^2 - x_1 x b^2$$

$$y = \frac{a^2 b^2 - x_1 x b^2}{y_1 a^2}$$

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan elips $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ sehingga diperoleh

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{a^2 b^2 - x_1 x b^2}{y_1 a^2}\right)}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{a^4 b^4 - 2a^2 b^4 x_1 x + x_1^2 x^2 b^4}{y_1^2 a^4}\right)}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$a^2 b^2 y_1 x^2 + a^4 b^4 - 2a^2 b^4 x_1 x + x_1^2 x^2 b^4 = a^4 b^2 y_1^2$$

$$a^2 y_1 x^2 + a^4 b^2 - 2a^2 b^2 x_1 x + x_1^2 x^2 b^2 = a^4 y_1^2$$

$$(a^2 y_1^2 + x_1^2 b^2) x^2 + (-2a^2 b^2 x_1) x + (a^4 b^2 - a^4 y_1^2) = 0$$

Nilai *y* dapat ditentukan dengan menggunakan rumus *abc*, sehingga diperoleh

$$= \frac{2a^2 b^2 x_1 \pm 2\sqrt{a^6 y_1^4 - a^6 b^2 y_1^2 + a^4 b^2 x_1^2 y_1^2}}{2(a^2 y_1^2 + x_1^2 b^2)}$$

Misalkan $z = \sqrt{a^2 y_1^2 - a^2 b^2 + b^2 x_1^2}$ (2)

$$x_{2,3} = \frac{a^2b^2x_1 \pm a^2y_1z}{a^2{y_1}^2 + {x_1}^2b^2} \tag{3}$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (1), diperoleh

$$y_{2,3} = \frac{a^2b^2 - \left[\frac{(a^2b^2x_1 \pm a^2y_1z)}{a^2{y_1}^2 + {x_1}^2b^2}\right]x_1b^2}{y_1a^2}$$

$$= \frac{a^2b^2(a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2) - x_1b^2(a^2b^2x_1 \pm a^2y_1z)}{a^2y_1(a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2)}$$

$$= \frac{a^2y_1(a^2b^2y_1 \mp b^2x_1z)}{a^2y_1(a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2)}$$

$$y_{2,3} = \frac{a^2b^2y_1 \mp b^2x_1z}{a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2} \tag{4}$$

Jadi koordinat titik singgungnya adalah :

$$A(x_2, y_2) = \left(\left(\frac{a^2b^2x_1 + a^2y_1z}{a^2{y_1}^2 + {x_1}^2b^2}\right), \left(\frac{a^2b^2y_1 - b^2x_1z}{a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2}\right)\right) \text{ dan} \tag{5}$$

$$B(x_3, y_3) = \left(\left(\frac{a^2b^2x_1 - a^2y_1z}{a^2{y_1}^2 + {x_1}^2b^2}\right), \left(\frac{a^2b^2y_1 + b^2x_1z}{a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2}\right)\right) \tag{6}$$

Sehingga semi kuasa titik di luar elips dapat ditentukan dengan

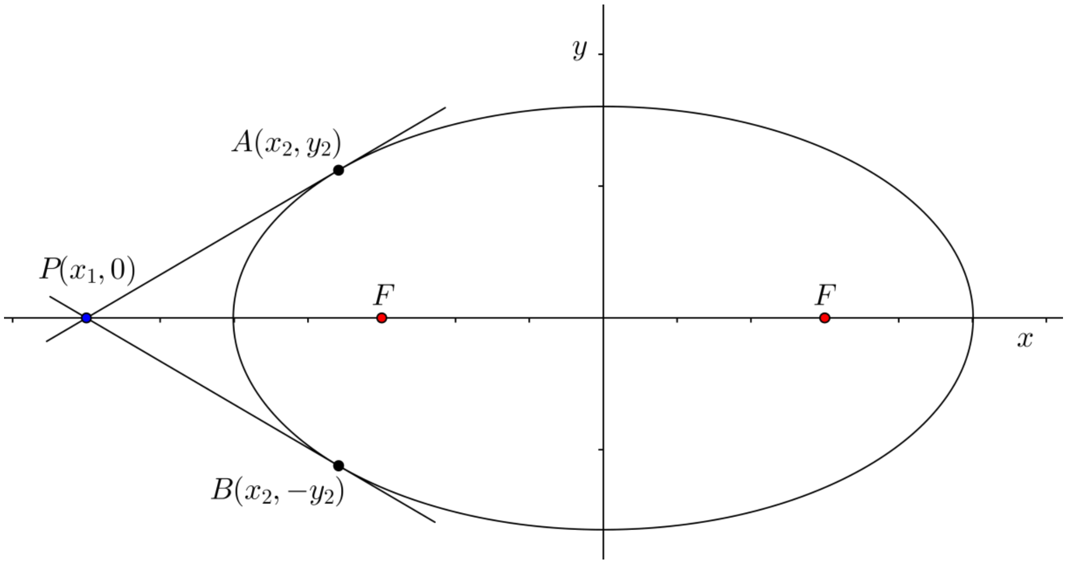
$$K_{P(x_1,y_1)} = |PA|^2 = \left(x_1 - \left(\frac{a^2b^2x_1 + a^2y_1z}{a^2{y_1}^2 + {x_1}^2b^2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(\frac{a^2b^2y_1 - b^2x_1z}{a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2}\right)\right)^2 \tag{7}$$ \

dan

$$K_{P(x_1,y_1)} = |PB|^2 = \left(x_1 - \left(\frac{a^2b^2x_1 - a^2y_1z}{a^2{y_1}^2 + {x_1}^2b^2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(\frac{a^2b^2y_1 + b^2x_1z}{a^2{y_1}^2 + b^2{x_1}^2}\right)\right)^2 \tag{8}$$

Dengan nilai $z = \sqrt{a^2{y_1}^2 - a^2b^2 + b^2{x_1}^2}$.

Semi Kuasa Titik $P(x_1,0)$ yang Berada Pada Sumbu Simetri *x* di Luar Elips



Gambar 4: Kedudukan titik $P(x_1,0)$ pada sumbu simetri *x* di luar elips

Perhatikan Gambar 4, misalkan titik $P(x_1,0)$ yang terletak pada sumbu simetri *x* di luar elips. Jika ditarik garis yang menyinggung elips dari titik $P(x_1,0)$ maka diperoleh titik singgung $A(x_2,y_2)$ dan titik singgung $B(x_3,y_3)$. Akan ditentukan panjang $|PA|^2$ dan $|PB|^2$ yang merupakan semi kuasa titik terhadap elips.

Berdasarkan koordinat titik singgung pada persamaan (5) dan (6), maka diperoleh koordinat titik singgung $A(x_2,y_2)$ dan $B(x_3,y_3)$ terhadap elips

$$A(x_2,y_2)=\left(\left(\frac{a^2b^2x_1+0}{0+x_1{}^2b^2}\right),\left(\frac{0-b^2x_1z}{0+b^2x_1{}^2}\right)\right)$$

$$A(x_2,y_2)=\left(\left(\frac{a^2b^2x_1}{b^2x_1{}^2}\right),\left(\frac{-b^2x_1z}{b^2x_1{}^2}\right)\right)$$

$$B(x_3,y_3)=\left(\left(\frac{a^2b^2x_1+0}{0+x_1{}^2b^2}\right),-\left(\frac{0-b^2x_1z}{0+b^2x_1{}^2}\right)\right)$$

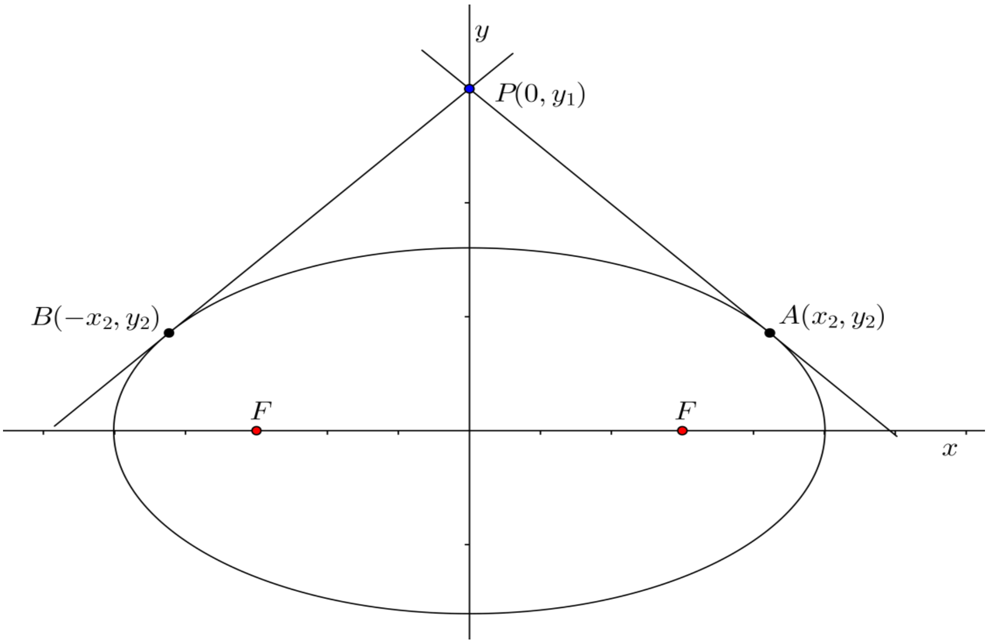
$$B(x_3,y_3)=\left(\left(\frac{a^2b^2x_1}{b^2x_1{}^2}\right),-\left(\frac{-b^2x_1z}{b^2x_1{}^2}\right)\right)$$

Sehingga semi kuasa titik pada sumbu simetri *x* di luar elips dapat ditentukan dengan

$$K_{P(x_1,y_1)}=K_P=|PA|^2=|PB|^2=\left(x_1-\left(\frac{a^2b^2x_1}{b^2x_1{}^2}\right)\right)^2+\left(-\left(\frac{b^2x_1z}{b^2x_1{}^2}\right)\right)^2 \qquad (11)$$

Semi Kuasa Titik $P(0,y_1)$ yang Berada Pada Sumbu Simetri *y* di Luar Elips

Misalkan titik $P(0,y_1)$ pada Gambar 5 berada pada sumbu simetri *y* di luar elips. Jika ditarik garis singgung dari titik $P(0,y_1)$ ke elips, maka diperoleh titik singgung $A(x_2,y_2)$ dan titik singgung $B(x_3,y_3)$. Akan ditentukan panjang $|PA|^2$ dan $|PB|^2$ yang merupakan semi kuasa titik terhadap elips.



Gambar 5: Kedudukan titik $P(0, y_1)$ pada sumbu simetri *y* di luar elips

Berdasarkan koordinat titik singgung pada koordinat titik singgung terhadap elips persamaan (5) dan (6), maka diperoleh

$$A(x_2, y_2) = \left(\left(\frac{0 + a^2 y_1 z}{a^2 {y_1}^2 + 0} \right), \left(\frac{a^2 b^2 y_1 - 0}{a^2 {y_1}^2 + 0} \right) \right)$$

$$A(x_2, y_2) = \left(\left(\frac{a^2 y_1 z}{a^2 {y_1}^2} \right), \left(\frac{a^2 b^2 y_1}{a^2 {y_1}^2} \right) \right) \tag{12}$$

$$B(x_3, y_3) = \left(\left(\frac{0 + a^2 y_1 z}{a^2 {y_1}^2 + 0} \right), -\left(\frac{a^2 b^2 y_1 - 0}{a^2 {y_1}^2 + 0} \right) \right)$$

$$B(x_3, y_3) = \left(\left(\frac{a^2 y_1 z}{a^2 {y_1}^2} \right), -\left(\frac{a^2 b^2 y_1}{a^2 {y_1}^2} \right) \right) \tag{13}$$

Sehingga semi kuasa titik pada sumbu simetri *y* di luar elips dapat ditentukan dengan

$$K_{P(x_1, y_1)} = |PA|^2 = |PB|^2 = \left(-\left(\frac{a^2 y_1 z}{a^2 {y_1}^2} \right) \right)^2 + \left(y_1 - \left(\frac{a^2 b^2 y_1}{a^2 {y_1}^2} \right) \right)^2 \tag{14}$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan penelitian ini dapat disimpulkan bahwa jika titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar elips, maka dapat ditentukan semi atau kuasa titik $P(x_1, y_1)$ terhadap elips dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik.

Bagi pembaca yang tertarik dengan penelitian ini, disarankan agar membahas tentang semi kuasa titik terhadap elips dengan bentuk persamaan umum yang dirotasikan sejauh sudut istimewa.

REFERENSI

[1] H.S.M. Coxeter, dan Greitzer, S.L., *Geometry Revisited*, MAA, Washington DC, 1967.H.S.M.Coxeter dan S.L.Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, Washington D C, 1967.
[2] Mashadi, *Geometri*, Pusbangdik UR, Pekanbaru, 2012.
[3] Ray C. Jurgensen, Richard G. Brown dan Alice M. King, *Geometry*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1983
[4] Sehatta Saragih, *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*, Pusbangdik UR, Pekanbaru, 2011.