KARISMATIKA
VOL. 3 NO. 1 APRIL 2017

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

BERKAS ELIPS

SUCI ANDRIANI[1], MASHADI[2], KARTINI[3]

[1]FMIPA Universitas Riau, suciandriani5292@gmail.com
[2] FMIPA Universitas Riau, mashadi.mat@gmail.com
[3] FKIP Universitas Riau, tin_baa@yahoo.com

ABSTRAK

Banyak buku teks dan peneliti sebelumnya telah membahas tentang berkas lingkaran. Jika terdapat lingkaran L_1 dan L_2, maka $t_1L_1 + t_2L_2 = 0$ dengan t_1 dan t_2 sebagai parameter dan $t_1 + t_2 \neq 0$ merepresentasikan berkas lingkaran. Pada artikel ini, penulis membahas tentang berkas elips. Jika terdapat elips Q_1 dan Q_2, maka $Q_1 + kQ_2 = 0$ dengan k sebarang bilangan real sebagai parameter merepresentasikan berkas elips. Persamaan elips yang memuat parameter tidak selalu menghasilkan bentuk elips, tetapi juga membentuk garis, lingkaran, parabola dan hiperbola. Selain itu, pada artikel ini juga membahas tentang kasus khusus dari berkas elips yaitu berkas elips yang melewati titik (x, y), berkas elips yang menyinggung sumbu x atau y, dan berkas elips yang menyinggung garis $ax + by + c = 0$.

Keywords: *Berkas elips, persamaan elips, eksistensi elips.*

1. Pendahuluan

Banyak buku dan artikel telah membahas tentang berkas lingkaran [1, 5, 7, 10, 11, 12, 13]. Berkas lingkaran merupakan kumpulan atau himpunan dari lingkaran yang terbentuk dari persamaan lingkaran yang memuat parameter [7]. Jika terdapat persamaan lingkaran $(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$ dengan r sebagai parameter, maka akan merepresentasikan berkas lingkaran yang memiliki titik pusat (1,2). Morrill [9] menyatakan jika terdapat dua buah lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$, maka $t_1L_1 + t_2L_2 = 0$ dengan t_1 dan t_2 sebagai parameter membentuk persamaan berkas lingkaran

$$x^2 + y^2 + \frac{(t_1D_1 + t_2D_2)x}{t_1 + t_2} + \frac{(t_1E_1 + t_2E_2)}{t_1 + t_2} + \frac{(t_1F_1 + t_2F_1)}{t_1 + t_2} = 0$$

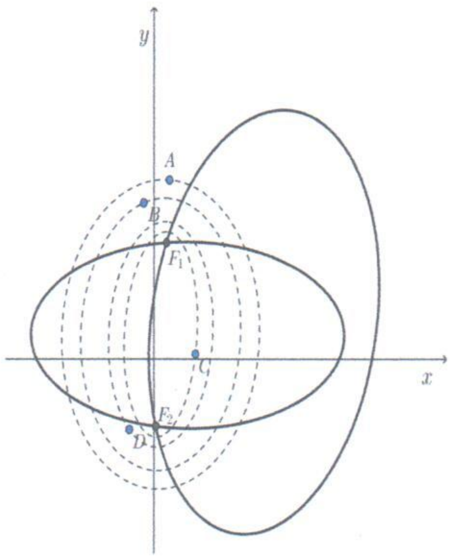
dengan $t_1 + t_2 \neq 0$.

Dari penjelasan singkat mengenai berkas lingkaran di atas, sehingga pada artikel ini penulis membahas tentang berkas elips.

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

2. Eksistensi Elips

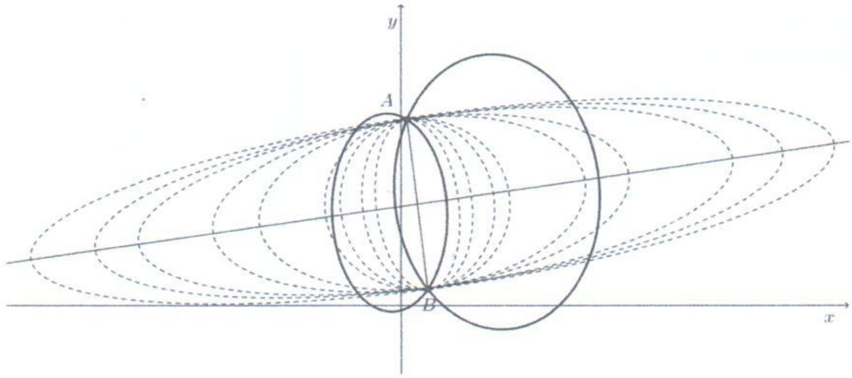
Eksistensi elips pada bidang dapat ditentukan jika terdapat minimal tiga buah bagian elips diketahui, misal panjang sumbu mayor dan minor, titik fokus, verteks, titik pusat, panjang latus rectum dan sebagainya. Misal terdapat persamaan elips $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Dari persamaan tersebut dapat diketahui bahwa untuk menentukan suatu persamaan elips tertentu dibutuhkan suatu nilai a dan b yang merupakan $\frac{1}{2}$ dari panjang sumbu mayor dan minor dari elips yang akan ditentukan. Selain itu, dibutuhkan juga suatu nilai h dan k yang merupakan titik pusat dari elips tersebut. Dengan menggunakan hubungan minimal tiga titik koordinat atau bagian dari elips yang diketahui, maka dapat ditentukan nilai-nilai dari panjang sumbu mayor dan minor serta titik pusat dari elips yang akan dikontruksi. Dengan kata lain, persamaan elips tertentu dapat dikontruksi jika diketahui minimal tiga titik dan atau bagian dari elips tersebut.



Gambar 1. Eksistensi elips dengan titik potong dua elips sebagai titik fokus.

Selain itu, eksistensi elips pada bidang juga dapat diketahui untuk kasus yang melalui atau menggunakan titik-titik potong dari dua buah elips yang saling berpotongan sebagai bagian dari elips yang akan dikontruksi. Terdapat dua buah titik potong dari dua buah elips yang saling berpotongan. Misal terdapat elips seperti pada Gambar 1 Titik F_1 dan F_2 adalah titik-titik potong dua buah elips sekaligus merupakan titik-titik fokus dari elips baru yang akan dibentuk. Titik A, B, C, dan atau D merupakan titik-titik yang dilewati oleh elips dengan titik fokus F_1 dan F_2.

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279



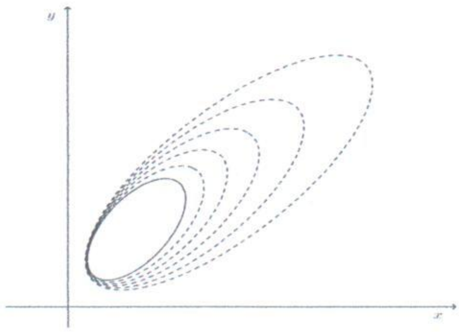
Gambar 2. Eksistensi elips dengan titik potong dua elips sebagai verteks.

Gambar 2 merupakan contoh lain dari kasus mengkontruksi elips dari titik-titik potong dua buah elips. Titik A dan B adalah titik-titik potong dua buah elips sekaligus merupakan dua buah verteks dari elips baru yang akan dikontruksi. Selain memiliki verteks di titik A dan B, elips-elips baru tersebut juga melewati suatu titik, menyinggung sumbu atau garis tertentu.

3. Berkas Elips

Definisi 1 (Berkas Elips) Berkas elips adalah kumpulan atau himpunan elips yang terbentuk dari persamaan elips yang memuat parameter.

Misal terdapat persamaan elips dalam bentuk $Ax^2 + 100xy + 69y^2 - 91x - 91y + 69 = 0$ nilai A merupakan parameter, maka berkas elips yang terbentuk dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Berkas elips $Ax^2 + 100xy + 69y^2 - 91x - 91y + 69 = 0$ dengan A sebagai parameter.

Proposisi 1. Jika terdapat $Q_1 \equiv A_1x^2 + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ dan $Q_2 \equiv A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$, maka $Q_1 + kQ_2 = 0$ dengan k sebarang bilangan real sebagai parameter, dan $A_1 + kA_2 \neq C_1 + kC_2$ tetapi memiliki tanda yang sama (sama-

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

sama negatif atau positif) membentuk berkas elips.

Bukti: Misal Q_1 dan Q_2 merupakan persamaan elips dengan

$$Q_1 \equiv A_1x^2 + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$

dan

$$Q_2 \equiv A_2x^2 + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0,$$

dengan k sebarang bilangan real sebagai parameter. Persamaan berkas elips $Q_1 + kQ_2 = 0$ dapat ditulis dalam bentuk

$$(A_1 + kA_2)x^2 + (C_1 + kC_2)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + (F_1 + kF_2) = 0 \quad (1)$$

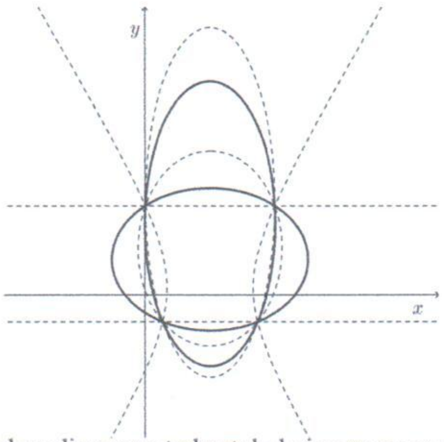
dengan k sebarang bilangan real sebagai parameter.

Andaikan $A_1 + kA_2 = C_1 + kC_2$, maka persamaan (1) menjadi

$$(A_1 + kA_2)x^2 + (A_1 + kA_2)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + (F_1 + kF_2) = 0\,,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{(D_1+kD_2)}{(A_1+kA_2)}x + \frac{(E_1+kE_2)}{(A_1+kA_2)}y + \frac{(F_1+kF_2)}{(A_1+kA_2)} = 0\,. \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan persamaan lingkaran [3, 4, 8]. Artinya, jika pada persamaan (1) $A_1 + kA_2 = C_1 + kC_2$, maka persamaan (1) tidak membentuk berkas elips, sehingga pada persamaan (1) harus $A_1 + kA_2 \neq C_1 + kC_2$.



Gambar 4. Berkas elips yang terbentuk dari persamaan $Q_1 + kQ_2 = 0$.

Andai $A_1 + kA_2$ dan $C_1 + kC_2$ berbeda tanda, misal $A_1 + kA_2$bertanda negatif maka persamaan (1) menjadi

$$-(A_1 + kA_2)x^2 + (C_1 + kC_2)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + (F_1 + kF_2) = 0. \quad (3)$$

Persamaan (3) merupakan bentuk persamaan hyperbola [3, 4, 8]. Artinya, jika pada persamaan (1) $A_1 + kA_2$ dan $C_1 + kC_2$ berbeda tanda (negatif atau positif), maka persamaan (1) tidak membentuk berkas elips, sehingga pada persamaan (1) harus $A_1 +$

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

kA_2 dan $C_1 + kC_2$ memiliki tanda yang sama.

Terdapat beberapa kasus khusus yang terjadi pada berkas elips yaitu berkas elips melewati titik (x, y), berkas elips menyinggung sumbu x atau y dan berkas elips menyinggung garis $ax + by + c = 0$.

Kasus 1. (**Berkas Elips Melalui Suatu Titik.**)

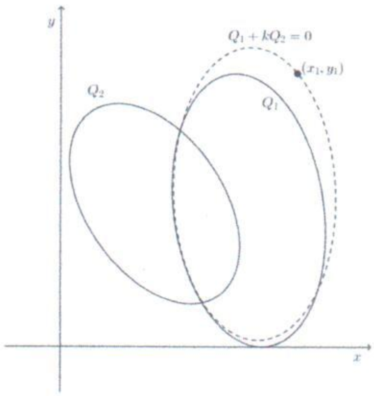
Jika berkas elips melewati titik (x_1, y_1), maka substitusikan nilai $x = x_1$ dan $y = y_1$ ke persamaaan (1) sehingga diperoleh

$$(A_1 + kA_2){x_1}^2 + (C_1 + kC_2){y_1}^2 + (D_1 + kD_2)x_1 + (E_1 + kE_2)y_1 + (F_1 + kF_2) = 0. \quad (4)$$

Dari persamaan (4) diperoleh

$$k = \frac{A_1{x_1}^2 + C_1{y_1}^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1}{A_2{x_1}^2 + C_2{y_1}^2 + D_2x_1 + E_2y_1 + F_2} \quad (5)$$

Kemudian nilai k pada persamaan (5) disubstitusikan ke persamaan (1), sehingga terbentuk suatu persamaan elips yang merupakan anggota dari berkas elips yang akan melewati titik (x_1, y_1).



Gambar 5. Berkas elips melewati titik (x_1, y_1).

Kasus 2. (Berkas Elips Menyinggung Sumbu x atau y.)

Jika berkas elips yang menyinggung sumbu x, maka $y = 0$ disubstitusikan ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$$(A_1 + kA_2)x^2 + (D_1 + kD_2)x + (F_1 + kF_2) = 0$$

Karena berkas elips menyinggung garis, maka berlaku $D = 0$ sehingga diperoleh

$$(D_1 + kD_2)^2 - 4(A_1 + kA_2)(F_1 + kF_2) = 0,$$

$$(D_2^2 - 4A_2F_2)k^2 + \big(2D_1D_2 - 4(A_1F_2 + A_2F_1)\big)k + (D_1^2 - 4A_1F_1) = 0. \quad (6)$$

Dari persamaan (6) diperoleh

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

$$k_1, k_2 = \frac{-(2D_1D_2-4(A_1F_2+A_2F_1))}{2(D_2^2-4A_2F_2)} \pm \frac{\sqrt{(2D_1D_2-4(A_1F_2+A_2F_1))^2-4(D_2^2-4A_2F_2)(D_1^2-4A_1F_1)}}{2(D_2^2-4A_2F_2)} \quad (7)$$

Nilai k pada persamaan (7) disubstitusikan ke persamaan (1), sehingga akan diperoleh persamaan berkas elips yang menyinggung sumbu x.

Sama halnya dengan kasus berkas elips yang menyinggung sumbu x, pada kasus berkas elips yang menyinggung sumbu y substitusikan $x = 0$ ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$$(C_1 + kC_2)y^2 + +(E_1 + kE_2)y + (F_1 + kF_2) = 0$$

Karena berkas elips menyinggung garis, maka berlaku $D = 0$ sehingga diperoleh

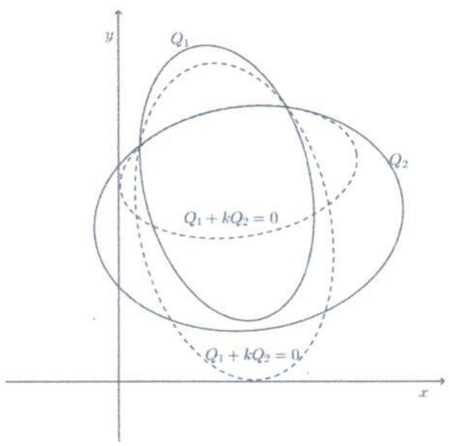
$$(E_1 + kE_2)^2 - 4(C_1 + kC_2)(F_1 + kF_2) = 0,$$

$$(E_2^2 - 4C_2F_2)k^2 + (2E_1E_2 - 4(C_1F_2 + C_2F_1))k + (E_1^2 - 4C_1F_1) = 0. \quad (8)$$

Dari persamaan (8) diperoleh

$$k_1, k_2 = \frac{-(2E_1E_2-4(C_1F_2+C_2F_1)) \pm \sqrt{(2E_1E_2-4(C_1F_2+C_2F_1))^2-4(E_2^2-4C_2F_2)(E_1^2-4C_1F_1)}}{2(E_2^2-4C_2F_2)} \quad (9)$$

Kemudian nilai k pada persamaan (9) disubstitusikan ke persamaan (1), sehingga akan diperoleh persamaan berkas elips yang menyinggung sumbu y.



Gambar 6. Anggota berkas elips yang menyinggung sumbu x dan y.

Kasus 3. (Berkas Elips Menyinggung Garis $ax + by + c = 0$.)

Jika berkas elips menyinggung garis $ax + by + c = 0$, maka persamaan garis diubah ke dlam bentuk $x = -\frac{b}{a}y - c$ atau $y = -\frac{a}{b}x - c$, kemudian substitusikan ke persamaan (1). Misal berkas elips menyinggung garis $y = -\frac{a}{b}x - c$ sehingga diperoleh

$$\left(A_1 + \frac{a^2}{b^2}C_1 + k\left(A_2 + \frac{a^2}{b^2}C_2\right)\right)x^2 +$$

$$\left(2\frac{ac}{b}C_1 + D_1 - \frac{a}{b}E_1 + k\left(2\frac{ac}{b}C_2 + D_2 - \frac{a}{b}E_2\right)\right)x +$$

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

$$\left(c^2C_1 - cE_1 + F_1 + k(c^2C_2 - cE_2 + F_2)\right) = 0.$$

Karena berkas elips menyinggung garis, maka berlaku $D = 0$ sehingga diperoleh

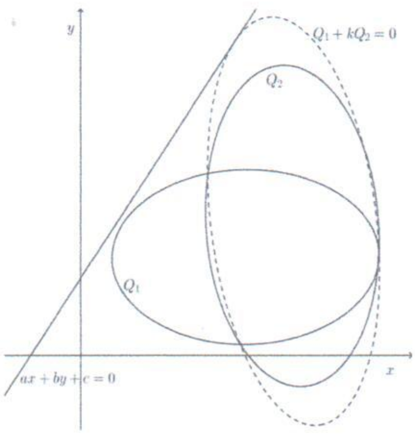
$$\left(2\frac{ac}{b}C_1 + D_1 - \frac{a}{b}E_1 + k\left(2\frac{ac}{b}C_2 + D_2 - \frac{a}{b}E_2\right)\right)^2 - 4\left(A_1 + \frac{a^2}{b^2}C_1 + k\left(A_2 + \frac{a^2}{b^2}C_2\right)\right)$$

$$\left(c^2C_1 - cE_1 + F_1 + k(c^2C_2 - cE_2 + F_2)\right) = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Misal $R = 2\frac{ac}{b}C_1 + D_1 - \frac{a}{b}E_1$, $S = 2\frac{ac}{b}C_2 + D_2 - \frac{a}{b}E_2$, $T = A_1 + \frac{a^2}{b^2}C_1$, $U = A_2 + \frac{a^2}{b^2}C_2$, $V = c^2C_1 - cE_1 + F_1$dan $W = c^2C_2 - cE_2 + F_2$ sehingga diperoleh

$$k_1, k_2 = \frac{-(2RS - 4(TW + UW)) \pm \sqrt{(2RS - 4(TW + UW))^2 - 4(S^2 - 4UW)(R^2 - 4TV)}}{2(S^2 - 4UW)} \qquad \textbf{(11)}$$

Kemudian nilai k pada persamaan (11) disubstitusikan ke persamaan (1), sehingga diperoleh persamaan elips yang merupakan anggota dari berkas elips menyinggung garis $ax + by + c = 0$.



Gambar 7. Anggota berkas elips yang menyinggung garis $ax + by + c = 0$.

Contoh 1. Misal terdapat Q_1 dan Q_2 saling berpotongan, dengan $Q_1 \equiv 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ dan $Q_2 \equiv 9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$. Berdasarkan persamaan (1) diperoleh

$$(9 + 9k)x^2 + (25 + 4k)y^2 + 54kx - 8ky + (-225 + 49k) = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

Misal berkas elips melalui titik $A(-2, -1)$. Dari persamaan (12) dan (5) dengan $x = -2$ dan $y = -1$ diperoleh $k = \frac{-164}{11}$. Kemudian $k = \frac{-164}{11}$ disubstitusikan ke persamaan (12), sehingga diperoleh

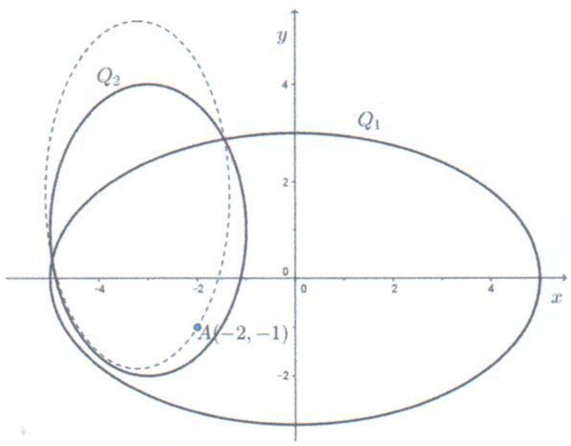
$$\left(9 + 9\left(\frac{-164}{11}\right)\right)x^2 + \left(25 + 4\left(\frac{-164}{11}\right)\right)y^2 + 54\left(\frac{-164}{11}\right)x - 8\left(\frac{-164}{11}\right)y$$

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

$$+\left(-225+49\left(\frac{-164}{11}\right)\right)=0,$$

$$-125{,}18x^2-34{,}64y^2-805{,}09x+119{,}27y-955{,}55=0. \quad \textbf{(13)}$$

Persamaan (13) merupakan persamaan elips yang melalui titik-titik potong Q_1 dan Q_2 serta melalui titik $A(-2,-1)$. Representasi pada bidang kartesius dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 8. Berkas elips yang melalui titik potong elips Q_1 dan Q_2 serta melalui titik $A(-2,-1)$.

4. KESIMPULAN

Berkas elips adalah kumpulan atau himpunan elips yang terbentuk dari persamaan elips yang memuat parameter. Persamaan elips yang memuat parameter tidak selalu membentuk berkas elips, tetapi juga dapat membentuk lingkaran dan hiperbola. Selain itu, pada nilai parameter tertentu berkas elips dapat melewati titik (x,y), menyinggung sumbu x dan y, serta menyinggung garis $ax+by+c=0$.

REFERENSI

[1] M. Audin, *Geometry*, Springer Verlag, 2002.

[2] W.H. Besant, *Conic Sections Treated Geometrically*, Cambridge, London, 2009.

[3] M. Bocher, *Plane Analytic Geometry*, Norwood Press, New York, 1915.

[4] E. S. Crawley dan H. B. Evans, *Analytic Geometry*, Press of The New Era Printing Company, Philadelphia, 1918.

[5] L. Dovnikonic, *The realization of continuity principle in the relativistic pencils of circles and shaperes*, Novi Sad J. Math, 29(1999): 97-107.

[6] E. Kohn, *Seri Matematika Keterampilan Geometri*, Terj. dari *Cliffs Quick Review Geometry*, oleh K.Y. Ervina, Penerbit Pakar Raya, Bandung.

p-ISSN : 2443 – 0366
e-ISSN : 2528 – 0279

[7] Mashadi, *Geometri Edisi Kedua*, UR Press, Pekanbaru, 2015.

[8] Mashadi, *Geometri Lanjut*, UR Press, Pekanbaru, 2015.

[9] Morrill, W.K., *Analytic Geometry in the Plane*, Scranton, Pennsylvania: International textbook Company, 1969.

[10] D. Pedoe, *Circles A Mathematical View*, The Mathematical Association of America, Washington, 1995.

[11] L.P. Siceloff, G. Wentworth, dan D.E. Smith, *Analytic Geometry*, Gin and Company, Boston, 1922.

[12] D. Suryadi H.S., *Teori dan Soal Ilmu Ukur Analitik Ruang*, Ghalia Indonesia, Jakarta Timur, 1986.

[13] Weistein, Eric W., Confocal Ellipses From *MathWorld-A* Wolfram Web Resource, *http://mathworld.wolfram.com/ConfocalEllipses.html*.

[14] Weistein, Eric W., Ellipses From *MathWorld-A* Wolfram Web Resource, *http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html*.