Vol. 4 (3) Juni 2020, hlm. 255-260
p-ISSN: 2548 – 8856 | e-ISSN: 2549 - 127X

DETERMINAN GRAF KNESER

Hanna Dewi Marina Hutabarat
Universitas Negeri Medan
Surel : hanahutabarat@unimed.ac.id

Abstract : Determinat of Kneser Graph. Kneser Graph is kind of simple graph with no loop and no parallel edge. Kneser Graphs $K(n,k)$ could be present with matrix. In this article, we will discuss about Kneser Graph, how to present it with adjacency matrix, the determinant of the matrix. We will show that the determinant of the adjacency matrix is always zero. Using cornice determinant, the determinant of Kneser Graphs matrix could counting more easily for nxn matrix with n>4.

Keywords : Kneser Graphs, Adjacency Matrix, Determinant.

Abstrak : Determinan Graf Kneser. Graf Kneser merupakan graf sederhana karena tidak memiliki lup dan tidak memiliki sisi parallel. Graf Kneser $K(n,k)$ dapat disajikan dalam bentuk matriks. Dalam artikel ini, akan dibahas tentang graf Kneser, penyajiannya dalam matriks ketetanggaan dan determinan dari matriks tersebut. Akan ditunjukkan bahwa determinan dari matriks ketetanggaan sebuah graf Kneser selalu nol. Pencarian determinan graf kneser menggunakan metode cornice determinan, dimana metode ini diperuntukkan untuk $n \geq 5$ yang merupakan metode tercepat dalam pencarian determinan matriks. Hal ini dikarenakan graf kneser yang cenderung memiliki titik yang banyak.

Kata kunci : Graf Kneser, Matriks Ketetanggaan, Determinan

PENDAHULUAN

Graf Kneser pertama kali dikenalkan oleh seorang ahli matematika kebangsaan Jerman, Martin Kneser pada tahun 1955. (Kneser, 1955) membuat dugaan bahwa ketika n-sub himpunan dari sebuah (2n+k)-himpunan dibagi atas (k+1) kelas, maka kedua sub himpunan yang tidak saling beririsan berada pada kelas yang sama. Kemudian dugaan Kneser ini dibuktikan oleh Lovasz (1978) dengan memperkenalkan sebuah kelas graf yang bernama Graf Kneser dengan mengambil dua bilangan bulat positif n dan k untuk melambangkan graf Kneser $K(n,k)$ (Scheinerman and Ullman 2011, pp. 31-32), dan alternative bukti juga diberikan oleh Bárány (1978). Namun Lovasz juga menambahkan bahwa bilangan kromatik dari graf kneser ini sama dengan $k+2$ yang artinya bahwa dugaan Kneser ini akan selalu salah jika banyak kelas meningkat ke $k+2$.

Graf Kneser yang dilambangkan dengan $K(n,k)$ merupakan graf sederhana karena tidak memiliki lup dan sisi parallel. Dengan n,k adalah bilangan bulat positif, k-sub himpunan dari $\{1,\ldots,n\}$ dan dua titiknya dikatakan terhubung jika dan hanya jika irisan dari sub himpunan bagian yang berkorespondensi dengan dua titik tersebut merupakan himpunan kosong. Karena itu $K(n,k)$ memiliki $\binom{n}{k}$ banyak titik, $\binom{n-k}{k}\binom{n}{k}\Big/2$ banyak sisi dan setiap titik memiliki tepat

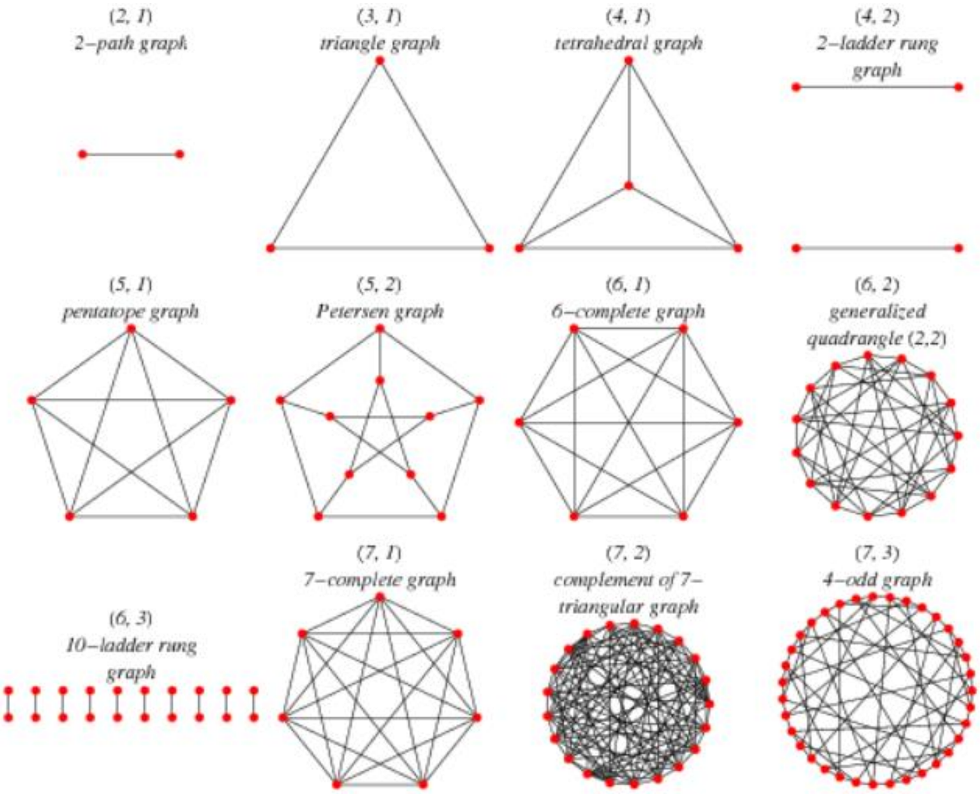
Diterima pada: 17 Juni 2020; Di-*review* pada: 20 Juni 2020; Disetujui pada: 29 Juni 2020

$\binom{n-k}{k}$ tetangga (Godsil, C. and Royle, G.(2001) .

Valencia-Pabon & Vera (2005) dalam artikelnya menunjukkan bahwa diameter dari graf kneser sama dengan $[(k-1)/n-2k]+1$.

Jika $n \geq \left(3k+1+\sqrt{5k^2-2k+1}\right)/2$, maka Graf Kneser $K(n,k)$ selalu mengandung Cycle Hamiltonian (Chen, 2003). Graf Kneser dikatakan graf komplit jika setiap titik terhubung dengan semua titik dalam graf tersebut. Graf komplit dengan n titik adalah graf Kneser $K(n,1)$. Dengan keistimewaannya, graf Kneser mendapat perhatian para matematikawan dalam meneliti. Benjian & Wang (2012) dalam jurnlanya membahas tentang nilai eigen dari graph Kneser. Nilai eigen berhubungan erat dengan determinan suatu graf. Namun pada tulisan ini, determinan yang dimaksud hanyalah berdasarkan matriks ketetanggaannya saja. Hutabarat M (2015) dalam artikelnya mambahas bagaimana mencari subgraf biclique maksimal dari matriks ketetanggaan dari Graf Kneser. Disampaikan bahwa pencarian sub biclique nya dapat ditenukan dengan menggunakan pola tertutup dari matriksnya.

Berikut adalah contoh dari graf Kneser.



Sumber. Mathworld.wolfram.com/KneserGraph.

METODE

Matriks

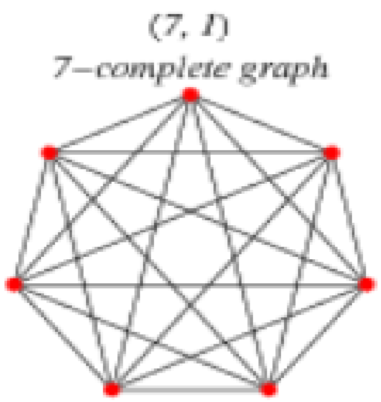
Matriks merupakan salah satu cara dalam menyajikan data. Dalam aljabar, matriks digunakan untuk menyajikan data dari banyak persamaan. Dalam teori graf, matriks juga dapat digunakan dalam menyajikan data dari sebuah graf. Disini, akan kita gunakan untuk menyajikan data dari graf dalam hal ini matriks ketetanggaan.

Defenisi : Matriks ketetanggaan dari graf Γ adalah matriks nxn, disimbolkan dengan $A(\Gamma)$, yang elemen-elemen nya a_{ij}, sebagai berikut :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,\text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga} \\ 0 & ,\text{ untuk hal yang lainnya} \end{cases}$$

Matriks ketetanggaan selalu merupakan matriks persegi. Ini dikarenakan matriks ketetanggaan merupakan ekspresi untuk menunjukkan keterhungan sebuah titik terhadap semua titik pada graf termasuk terhadap titik itu sendiri.

Misal untuk graf Kneser $K(7,1)$ yang merupakan graf komplit karena terhubung kesemua titik pada graf.



Matriks ketetanggaan dari graf diatas adalah $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Graf Kneser merupakan graf sederhana tanpa lup dan sisi paralel yang mengakibatkan nilainya hanyalah 0 dan 1.

Untuk Sebuah graf berbobot, matriks yang disajikan dari graf tersebut bukanlah matriks ketetanggaan, namun a_{ij} nya merupakan nilai dari bobot dari setiap sisi pada graf.

Determinan

Dalam bidang aljabar, determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi. Determinan merupakan factor penskalaan transformasi yang digambarkan oleh matriks. Determinan dari sebuah matriks dapat dicari dengan banyak cara. Penggunaannya metode disesuaikan dengan kebutuhan atau jenis matriks yang ingin dicari determinannya. Sejalan dengan perkembangan pengetahuan, metode mencari determinan dari sebuah graf semakin banyak.

1. Untuk matriks 2x2

   Penentuan determinannya sangat sederhana : Det $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

   Beberapa sifat yang mengikuti adalah :

a. Jika dua baris matriks A sama, maka det(A)=0
b. Jika matrik B diperoleh dari matriks A dengan menambah suatu baris dengan K kali baris yang lain. Maka det (B) = Det (A)
c. Det (A)=Det (A^t)

2. Untuk Matriks 3x3
Penentuan determinannya bisa menggunakan cara

a.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

b. Eliminasi Gauss. Yaitu dengan cara mereduksi sampai menolkan segitiga bawah atau segitiga atas. Setelah itu maka hasil kali nilai diagonalnya merupakan nilai determinannya (Zaini, 2016)

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Direduksi menjadi

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4.5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4.5 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}.$$

Sehingga nilai det (A)= - Det (D) = - [(-2)x2x4,5] =18.

c. Sarrus. Dikenal dengan metode anyaman, dilakukan dengan cara :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} =$$
$$aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$$

3. Untuk Matriks nxn, n>3
a. Ekstension Sarrus [8] Dalam jurnalnya, Sobamowo menunjukkan pengembangan metode sarrus untuk pencarian matriks 4x4
b. Cornice determinan. [9] Dalam jurnalnya, Gjonbalaj & Salihu menemukan cara menghitung determinan utk matriks nxn, n>4. Dengan menggunakan Determinan

$$|C_{(n-4)(n-4)}| = \left|\begin{pmatrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} \end{pmatrix}\right|$$

$$|C_{nxn}| = [a_{1,2}a_{2,1}a_{n,n-1}a_{n-1,n} - (a_{1,2}a_{2,n}a_{n,n-1}a_{n-1,1}) - (a_{2,1}a_{n,2}a_{1,n-1}a_{n-1,n}) + a_{1,n-1}a_{2,n}a_{n,2}a_{n-1,1}]\,|C_{(n-4)(n-4)}|$$

PEMBAHASAN

Determinan Matriks Ketetanggaan Dari Graf Kneser

Penentuan determinan untuk matriks ketetanggaan dari graf Kneser yang cenderung mempunyai titik yang banyak disarankan langsung menggunakan metode Cornice Determinan karena dianggap lebih sederhana penggunaannya.

Dari ciri-ciri graf Kneser yang tidak mempunyai lup maka nilai $a_{i,i} = 0$

Untuk Graf Kneser komplit, misal $K_{7,1}$ determinan dengan cornice maka

$$|C_{(7-4)(7-4)}| = \left|\begin{pmatrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,5} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{5,3} & \cdots & a_{5,5} \end{pmatrix}\right| = 0$$

Ini dikarenakan semua nilai $a_{i,j}$= 1 sehingga bila dikalikan hasilnya akan sama dengan nol.

Dengan rumus

$$|C_{7x7}| = \left[a_{1,2}a_{2,1}a_{7,6}a_{6,7} - \left(a_{1,2}a_{2,7}a_{7,6}a_{6,7}\right) - \left(a_{2,1}a_{n,2}a_{16}a_{6,7}\right) + a_{1,6}a_{2,7}a_{7,2}a_{7,1}\right]|C_{3,3}| = [1.1.1.1 - (1.1.1.1) - (1.1.1.1) + 1.1.1.1].0 = 0$$

Karena nilai $|C_{3,3}| = 0$. Untuk semua orde pada matriks ketetanggaan dari Graf Kneser, nilai $|C_{n-4,n-4}|$ akan selalu sama dengan nol. Hal ini berlaku untuk semua Graf Kneser.

Berdasarkan ini, maka dapat disimpulkan bahwa untuk matriks ketetanggaan dari setiap Graf Kneser determinan dari matriks adjacency atau matriks ketetanggaannya akan selalu sama dengan 0

Hal ini tidak berlaku bagi matriks berbobot Graf Kneser. Akan dilakukan penelitian lebih lanjut untuk hal ini .

KESIMPULAN

Komponen matriks ketetanggaan dari suatu graf Kneser akan selalu memiliki nilai $a_{i,i} = 0$. Ini mengakibatkan suatu ketentuan bahwa nilai determinan dari matriks ketetanggan dari setiap Graf Kneser akan selalu sama dengan 0 juga. Ini sejalan dengan matriks identitas, dimana semua nilai $a_{i,i} = 1$ dan $a_{i,j} = 0$ memiliki determinan sama dengan 1.

DAFTAR RUJUKAN

Kneser, M. (1955) "Aufgabe 300." *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 58.

Lovász, L.(1978) "Kneser's Conjecture, Chromatic Numbers and Homotopy." *J. Comb. Th. A* 25, 319-324.

Bárány, I. (1978), "A Short Proof of Kneser's Conjecture." *J. Comb. Th. A* 25, 325-326.

Scheinerman, E. R. and Ullman, D. H. *Fractional Graph Theory A Rational Approach to the Theory of Graphs*. New York: Dover, 2011.

Mario Valencia-Pabon, Juan-Carlos Vera (2005), "On The Diameter of Kneser Graphs", Discreate Mathemetics ELSEVIER Volume 305, Issue 1-3, Pages 383-385.

Chen, Ya-Chen (2003), "Triangle-free Hamiltonian Kneser Graph", Journal of Combinatorial Theory, Series B, 89(1), doi: 10.1016/S0095-8956(03)00040-6

BenjianLv, KaishunWang (2012) "The eigenvalues of q-Kneser Graph", Discrete Mathematics ELSEVIER Volume 312, Issue 6, 28 March 2012, Pages 1144-1147.

H.D. Marina Hutabarat (2015) " Menentukan subgraf biclique maksimal dengan pasangan pola tertutup pada graf Kneser"., Jurnal Kharismatika, vo.1.no.2 2015.

Zaini (2016) Determinan matriks persegi dan non persegi. Uwais inspirasi Indonesia.

A. Brouwer, W. Haemers (2011) **Spectra of Graphs** Springer.

Sobamowo M.G (2016), "On The Extension of Sarrus' Rule to nxn (n>3) matrics : Development of New Method for the Computation of the Determinant of 4x4 Matrix"International Journal of Engineering Mathematics, Vol 2016, https://doi.org/10.1155/2016/9382739