KONVERGENSI DAN KONTINUITAS DERET KUASA SOLUSI PERSAMAAN LAPLACE PADA DIMENSI *N*

Lasker P. Sinaga[1]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Medan, Jln. Willem Iskandar Pasar V,Medan 20221*

Diterima 7 Juni 2012, disetujui untuk publikasi 25 Agustus 2012

Abstract *Persamaan Laplace adalah salah satu bentuk persamaan differensial parsial yang banyak diteliti karena sangat berguna untuk menyelesaikan kasus-kasus matematika terapan. Tulisan ini menunjukkan deret kuasa solusi dari persamaan Laplace pada dimensi n serta menunjukkan kekonvergenan dan kekontinuannya. Untuk mencapai tujuan ini, persamaan Laplace akan diubah menjadi beberapa persamaan differensial biasa oleh metode pemisahan variabel dan selanjutnya metode deret kuasa solusi akan menyelesaikan persamaan-persamaan baru tersebut. Solusi persamaan adalah perkalian atas deret-deret kuasa dengan variabel terpisah. Deret kuasa solusi persamaan Laplace adalah konvergen absolut dan kontinu.*

Kata kunci: *Persamaan Laplace, Pemisahan Variabel, Deret Kuasa Solusi*

Pendahuluan

Persamaan Laplace atau persamaan potensial banyak dikaji matematikawan karena mampu menyelesaikan permasalahan matematika terapan seperti teori perpindahan massa dan panas, mekanika fluida, elastisitas, elektrostatis, dan lain-lain. Adapun bentuk persamaan Laplace dalam dimensi *n* dalam koordinat kartesius adalah:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_n}^2} = 0$$

Persamaan Laplace pada dimensi *n* berkaitan dengan polinomial Jakobi (*Jacobian Polynomials*). (Jing-Jing F., Ling H., Shi-Jie Y., 2011).

Deret solusi dan deret kuasa solusi adalah salah satu metode yang dipakai untuk menyelesaikan kasus - kasus persamaan differensial. Metode ini mengingatkan kembali kepada deret Taylor dengan bentuk:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

dimana $a_0, a_1, a_2, \dots$ dan x_0 adalah konstanta dan *x* adalah variabel. Deret ini sering disebut dengan deret kuasa. Metode deret solusi merupakan teknik analitik. Langkah pertama yang dilakukan dalam menyelesaikan persamaan Laplace adalah menggunakan metode pemisahan variabel dan kemudian melakukan metode deret solusi. Meode ini memberikan hasil yang tepat dan analitik untuk geometri batas reguler. (Read W. W., 1993).

Selain metode deret solusi, deret kuasa solusi dapat menunjukkan solusi persamaan differensial dalam bentuk polinomial, dan memudahkan untuk menganalisis kekonvergenannya. Deret solusi dan deret kuasa solusi pada persamaan differensial nonlinear adalah konvergen. (Thandapani E., dkk, 1987).

Metode deret kuasa solusi ini memberikan solusi yang analitik, dan merupakan metode yang sangat sederhana dan efektif dalam menyelesaikan kasus-kasus sistim persamaan differensial. (Güzel N., Bayram M., 2005).

Metode pemisahan variabel merupakan metode yang membuat persamaan differensial parsial menjadi beberapa persamaan differensial biasa. Metode ini memisalkan solusi umum menjadi perkalian fungsi-fungsi dengan variabel terpisah. Dengan demikian, metode pemisahan variabel dapat digunakan untuk mempermudah dalam penyelesaian persamaan-persamaan differensial parsial.

Untuk lebih mudah menunjukkan deret kuasa solusi dari persamaan Laplace pada dimensi *n*, maka perlu dilakukan campuran metode antara metode pemisahan variabel dan metode deret kuasa solusi. Metode pemisahan variabel akan digunakan terlebih dahulu untuk menyederhanakan persamaan differensial dan selanjutnya menggunakan metode deret kuasa solusi untuk persamaan-persamaan baru yang terbentuk.

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini akan ditunjukkan deret kuasa solusi persamaan Laplace dan kemudian menganalisis kekonvergenan dan kekontinuannya. Untuk dapat menyelesaikan persamaan ini, pertama sekali akan digunakan metode pemisahan variabel yaitu memisalkan solusi umum sebagai perkalian deret-deret kuasa dengan variabel terpisah. Metode deret kuasa akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan yang dihasilkan metode pemisahan variabel tersebut. Kekonvergenan dan kekontinuan deret solusi yang diperoleh akan kaji berdasarkan definisi dan teorema pendukung.

PEMBAHASAN DAN HASIL

Deret Kuasa Solusi Persamaan Laplace

Persamaan Laplace dimensi n pada koordinat kartesius dengan bentuk:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_2}^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_n}^2} = 0$$

Persamaan (1) diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*Separation of Variables*), yaitu dengan memisalkan solusi $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sebagai perkalian fungsi - fungsi dengan variabel bebas terpisah, yaitu. $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1(x_1) X_2(x_2) \dots X_n(x_n)$

Kemudian, dimisalkan bahwa masing – masing fungsi tersebut merupakan deret kuasa $X_1(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m$, $X_2(x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m$, dan $X_n(x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m$ sehingga solusi persamaan tersebut akan berbentuk:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m \dots \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m \qquad (2)$$

Selanjutnya, solusi (2) didifferensialkan dua kali terhadap masing-masing variabel bebasnya, maka diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_1}^2} = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{1_m} {x_1}^{m-2} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m \dots \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m \quad \dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

dan

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_2}^2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{2_m} {x_2}^{m-2} \dots \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m \qquad (4)$$

dan seterusnya sehingga,

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_n}^2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m \dots \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{n_m} {x_n}^{m-2} \qquad (5)$$

Kemudian masing-masing hasil differensial (3), (4), (5) disubstitusi kembali ke dalam persamaan Laplace sehingga diperoleh:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{1_m} {x_1}^{m-2} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m \dots \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{2_m} {x_2}^{m-2} \dots \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m + \dots + \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m \dots \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{n_m} {x_n}^{m-2} = 0 \qquad (6)$$

Persamaan (6) dibagi dengan $\sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m \dots \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m$ dengan $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$, dan $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$ sehingga diperoleh deret solusi dengan variabel terpisah dan ω_0 sebagai parameter, yaitu:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{1_m} {x_1}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m} = -\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{2_m} {x_2}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} {x_2}^m} - \frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{3_m} {x_3}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{3_m} {x_3}^m} - \dots - \frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{n-1_m} {x_{n-1}}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1_m} {x_{n-1}}^m} - \frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{n_m} {x_n}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} {x_n}^m} = \omega_0 \qquad (7)$$

sehingga persamaan diruas kiri adalah:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{1_m} {x_1}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m} = \omega_0 \qquad (8)$$

Dengan memisalkan $\omega_0 = \mu_1$ maka deret solusi (8) menjadi:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{1_m} {x_1}^{m-2} = \mu_1 \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} {x_1}^m \qquad (9)$$

Persamaan (7) diruas kanan dipisah kembali dengan parameter ω_1, yaitu:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{2_m}x_2{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m}x_2{}^m} + \omega_0 =$$

$$-\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{3_m}x_3{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{3_m}x_3{}^m} - \cdots - \frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n-1_m}x_{n-1}{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1_m}x_{n-1}{}^m} - \frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n_m}x_n{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m}x_n{}^m}$$

$$= \omega_1 \tag{10}$$

sehingga persamaan (10) diruas kiri adalah:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{2_m}x_2{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m}x_2{}^m} + \omega_0 = \omega_1 \tag{11}$$

Dengan memisalkan $\omega_1 - \omega_0 = \mu_2$ maka deret solusi (11) menjadi:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{2_m}x_2{}^{m-2} = \mu_2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m}x_2{}^m \tag{12}$$

Persamaan (10) diruas kanan akan terpisah kembali dengan parameter ω_2, yaitu:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{3_m}x_3{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{3_m}x_3{}^m} + \omega_1 =$$

$$-\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{4_m}x_4{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{4_m}x_4{}^m} - \cdots - \frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n-1_m}x_{n-1}{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1_m}x_{n-1}{}^m} - \frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n_m}x_n{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m}x_n{}^m}$$

$$= \omega_2 \tag{13}$$

sehingga persamaan (13) diruas kiri adalah:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{3_m}x_3{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{3_m}x_3{}^m} + \omega_1 = \omega_2 \tag{14}$$

Dengan memisalkan $\omega_2 - \omega_1 = \mu_3$ maka deret solusi (14) menjadi:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{3_m}x_3{}^{m-2} = \mu_3 \sum_{m=0}^{\infty} a_{3_m}x_3{}^m \tag{15}$$

Demikian proses yang sama terus dilakukan sehingga pada akhirnya diperoleh dua persamaan dengan parameter ω_{n-2}, yaitu:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n-1_m}x_{n-1}{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1_m}x_{n-1}{}^m} + \omega_{n-3} = -\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n_m}x_n{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m}x_n{}^m} = \omega_{n-2} \tag{16}$$

sehingga persamaan (16) diruas kiri adalah:

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n-1_m}x_{n-1}{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1_m}x_{n-1}{}^m} + \omega_{n-3} = \omega_{n-2} \tag{17}$$

Misalkan $\omega_{n-2} - \omega_{n-3} = \mu_{n-1}$ maka persamaan (17) menjadi:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n-1_m}x_{n-1}{}^{m-2} = \mu_{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1_m}x_{n-1}{}^m \tag{18}$$

Dan bentuk terakhir adalah:

$$-\frac{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n_m}x_n{}^{m-2}}{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m}x_n{}^m} = \omega_{n-2} \tag{19}$$

Dengan memisalkan $\omega_{n-2} = \mu_n$ maka deret solusi (19) menjadi:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{n_m}x_n{}^{m-2} = -\mu_n \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m}x_n{}^m \tag{20}$$

Dengan demikian telah diperoleh *n* persamaan deret kuasa solusi yang harus diselesaikan kembali secara terpisah dalam bentuk kasus-1, kasus-2 sampai kasus ke-n sebagai berikut:

Kasus 1: Deret kuasa solusi atas variabel x_1.

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_{1_m}x_1{}^{m-2} = \mu_1 \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m}x_1{}^m$$

atau

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+2)(m+1)a_{1_{m+2}} - \mu_1 a_{1_m}\right]x_1{}^m = 0$$

sehingga $\left[(m+2)(m+1)a_{1_{m+2}} - \mu_1 a_{1_m}\right] = 0$ atau $a_{1_{m+2}} = \frac{\mu_1}{(m+2)(m+1)} a_{1_m}$

a) Untuk suku-suku genap diperoleh:

$m = 0 \rightarrow a_{1_2} = \frac{\mu_1}{2.1} a_{1_0}$

$m = 2 \rightarrow a_{1_4} = \frac{\mu_1}{4.3} a_{1_2} = \frac{\mu_1{}^2}{4.3.2.1} a_{1_0}$

sehingga secara umum, koefisien suku-suku genap adalah

$$a_{1_{2k}} = \frac{\mu_1{}^k}{(2k)!} a_{1_0}, k = 1,2,3, \ldots$$

b) Untuk suku-suku ganjil diperoleh:

$m = 1 \rightarrow a_{1_3} = \frac{\mu_1}{3.2} a_{1_1}$

$m = 3 \rightarrow a_{1_5} = \frac{\mu_1}{5.4} a_{1_3} = \frac{\mu_1{}^2}{5.4.3.2.1} a_{1_1}$

sehingga secara umum, suku-suku ganjil adalah

$$a_{1_{2k+1}} = \frac{\mu_1{}^k}{(2k+1)!} a_{1_1}, k = 1,2,3, \ldots$$

Dengan demikian:

$X_1(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} x_1{}^m$

$= (a_{1_0} + a_{1_2} x_1{}^2 + a_{1_4} x_1{}^4 \ldots) + (a_{1_1} x_1 + a_{1_3} x_1{}^3 + a_{1_5} x_1{}^5 + \cdots).$

$= (a_{1_0} + \frac{\mu_1}{2!} a_{1_0} x_1{}^2 + \frac{\mu_1{}^2}{4!} a_{1_0} x_1{}^4 + \cdots) + (a_{1_1} x_1 + \frac{\mu_1}{3!} a_{1_1} x_1{}^3 + \frac{\mu_1{}^2}{5!} a_{1_1} x_1{}^5 + \cdots)$ (21)

sehingga deret kuasa solusi untuk variabel x_1 diperoleh:

$$X_1(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_1{}^m \left[\frac{a_{1_0}}{(2m)!} x_1{}^{2m} + \frac{a_{1_1}}{(2m+1)!} x_1{}^{2m+1}\right] \quad (22)$$

Kasus 2: Deret kuasa solusi atas variabel x_2.

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{2_m} x_2{}^{m-2} = \mu_2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} x_2{}^m$$

atau

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1) a_{2_{m+2}} - \mu_2 a_{2_m}] x_2{}^m = 0$$

sehingga $(m+2)(m+1)a_{2_{m+2}} - \mu_2 a_{2_m} = 0$ atau $a_{2_{m+2}} = \frac{\mu_2}{(m+2)(m+1)} a_{2_m}$

a) Untuk suku-suku genap diperoleh:

$m = 0 \rightarrow a_{2_2} = \frac{\mu_2}{2.1} a_{2_0}$

$m = 2 \rightarrow a_{2_4} = \frac{\mu_2}{4.3} a_{2_2} = \frac{\mu_2{}^2}{4.3.2.1} a_{2_0}$

sehingga secara umum, suku-suku genap adalah

$$a_{2_{2k}} = \frac{\mu_2{}^k}{(2k)!} a_{2_0}, k = 1,2,3, \ldots$$

b) Untuk suku-suku ganjil diperoleh:

$m = 1 \rightarrow a_{2_3} = \frac{\mu_2}{3.2} a_{2_1}$

$m = 3 \rightarrow a_{2_5} = \frac{\mu_2}{5.4} a_{2_3} = \frac{\mu_2{}^2}{5.4.3.2.1} a_{2_1}$

sehingga secara umum, suku-suku ganjil adalah

$$a_{2_{2k+1}} = \frac{\mu_2{}^k}{(2k+1)!} a_{2_1}, k = 1,2,3, \ldots$$

Dengan demikian:

$X_2(x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} x_2{}^m.$

$= (a_{2_0} + a_{2_2} x_2{}^2 + a_{2_4} x_2{}^4 \ldots) + (a_{2_1} x_2 + a_{2_3} x_2{}^3 + a_{2_5} x_2{}^5 + \cdots).$

$=$

$(a_{2_0} + \frac{\mu_2}{2!} a_{2_0} x_2{}^2 + \frac{\mu_2{}^2}{4!} a_{2_0} x_2{}^4 + \cdots) + (a_{2_1} x_2 + \frac{\mu_2}{3!} a_{2_1} x_2{}^3 + \frac{\mu_2{}^2}{5!} a_{2_1} x_2{}^5 + \cdots)$ (23)

sehingga deret kuasa solusi untuk variabel x_2 diperoleh:

$$X_2(x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_2{}^m \left[\frac{a_{2_0}}{(2m)!} x_2{}^{2m} + \frac{a_{2_1}}{(2m+1)!} x_2{}^{2m+1}\right] \qquad (24)$$

Dengan melakukan proses ini seterusnya maka kasus ke-n diperoleh.

Kasus ke-n: Deret kuasa solusi atas variabel x_n.

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_{n_m} x_n{}^{m-2} = -\mu_n \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} x_n{}^m$$

atau

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1) a_{n_{m+2}} + \mu_n a_{n_m}] x_n{}^m = 0$$

sehingga $(m+2)(m+1) a_{n_{m+2}} + \mu_n a_{n_m} = 0$ atau $a_{n_{m+2}} = \frac{-\mu_n}{(m+2)(m+1)} a_{n_m}$

a) Untuk suku-suku genap diperoleh:

$m = 0 \rightarrow a_{n_2} = \frac{-\mu_n}{2.1} a_{n_0}$

$m = 2 \rightarrow a_{n_4} = \frac{-\mu_n}{4.3} a_{n_2} = \frac{\mu_n{}^2}{4.3.2.1} a_{n_0}$

sehingga secara umum, suku-suku genap adalah

$$a_{n_k} = \frac{(-1)^k \mu_n{}^k}{(2k)!} a_{n_0}, k = 1,2,3, \ldots$$

b) Untuk suku-suku ganjil diperoleh:

$$m = 1 \rightarrow a_{n_3} = \frac{-\mu_n}{3.2} a_{n_1}$$

$$m = 3 \rightarrow a_{n_5} = \frac{-\mu_n}{5.4} a_{n_3} = \frac{\mu_n{}^2}{5.4.3.2.1} a_{n_1}$$

sehingga secara umum, suku-suku ganjil adalah

$$a_{n_{2k+1}} = \frac{(-1)^k \mu_n{}^k}{(2k+1)!} a_{n_1}, k = 1,2,3, \ldots$$

Dengan demikian:

$$X_n(x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} x_n{}^m.$$

$$= (a_{n_0} + a_{n_2} x_n{}^2 + a_{n_4} x_n{}^4 \ldots) + (a_{n_1} x_n + a_{n_3} x_n{}^3 + a_{n_5} x_n{}^5 + \cdots).$$

$$= (a_{n_0} + \frac{-\mu_n}{2!} a_{n_0} x_n{}^2 + \frac{\mu_n{}^2}{4!} a_{n_0} x_n{}^4 + \cdots) + (a_{n_1} x_n + \frac{-\mu_n}{3!} a_{n_1} x_n{}^3 + \frac{\mu_n{}^2}{5!} a_{n_1} x_n{}^5 + \cdots) \quad (25)$$

sehingga deret kuasa solusi untuk variabel x_n diperoleh:

$$X_n(x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu_n{}^m \left[\frac{a_{n_0}}{(2m)!} x_n{}^{2m} + \frac{a_{n_1}}{(2m+1)!} x_n{}^{2m+1}\right] \quad (26)$$

Akhirnya, bentuk deret kuasa solusi persamaan differensial yang diperoleh adalah:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X_1(x_1) X_2(x_2) \ldots X_n(x_n)$$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{1_m} x_1{}^m \sum_{m=0}^{\infty} a_{2_m} x_2{}^m \ldots \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_m} x_n{}^m$$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_1{}^m \left[\frac{a_{1_0}}{(2m)!} x_1{}^{2m} + \frac{a_{1_1}}{(2m+1)!} x_1{}^{2m+1}\right]$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_2{}^m \left[\frac{a_{2_0}}{(2m)!} x_2{}^{2m} + \frac{a_{2_1}}{(2m+1)!} x_2{}^{2m+1}\right] \cdots$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu_n{}^m \left[\frac{a_{n_0}}{(2m)!} x_n{}^{2m} + \frac{a_{n_1}}{(2m+1)!} x_n{}^{2m+1}\right] \quad (27)$$

Konvergensi dan Kontinuitas Deret Kuasa Solusi Persamaan Laplace.

Kekonvergenan dan kekontinuan deret kuasa solusi (27) yang telah diperoleh akan ditunjukkan pada bagian ini. Misalkan setiap deret kuasa solusi dengan variabel terpisah adalah:

$$X_1(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} (v_1)_m = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_1{}^m \left[\frac{a_{1_0}}{(2m)!} x_1{}^{2m} + \frac{a_{1_1}}{(2m+1)!} x_1{}^{2m+1}\right]$$

$$X_2(x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} (v_2)_m = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_2{}^m \left[\frac{a_{2_0}}{(2m)!} x_2{}^{2m} + \frac{a_{2_1}}{(2m+1)!} x_2{}^{2m+1}\right]$$

$\vdots$

$$X_{n-1}(x_{n-1}) = \sum_{m=0}^{\infty}(v_{n-1})_m = \sum_{m=0}^{\infty}\mu_{n-1}{}^m\left[\frac{a_{n-1_0}}{(2m)!}x_{n-1}{}^{2m} + \frac{a_{n-1_1}}{(2m+1)!}x_{n-1}{}^{2m+1}\right]$$

$$X_n(x_n) = \sum_{m=0}^{\infty}(v_n)_m = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mu_n{}^m\left[\frac{a_{n_0}}{(2m)!}x_n{}^{2m} + \frac{a_{n_1}}{(2m+1)!}x_n{}^{2m+1}\right]$$

sehingga deret solusi $u = \sum_{m=0}^{\infty}(v_1)_m \sum_{m=0}^{\infty}(v_2)_m \cdots \sum_{m=0}^{\infty}(v_{n-1})_m \sum_{n=0}^{\infty}(v_n)_m$ akan ditunjukkan sebagai fungsi yang konvergen dengan memperhatikan keadaan masing-masing barisan $(v_1)_m, (v_2)_m, \ldots, (v_{n-1})_m, (v_n)_m$.

Teorema (The Ratio Test) Misalkan bahwa $\sum_{m=0}^{\infty} v_m$ adalah sebuah deret bilangan *R* tidak nol dengan dan $\frac{|v_{m+1}|}{|v_m|} \to L$ untuk $m \to \infty$, sehingga:

a. Jika $L < 1$ maka deret $\sum_{m=0}^{\infty} v_m$ adalah konvergen absolut.

b. Jika $L > 1$ maka deret $\sum_{m=0}^{\infty} v_m$ adalah divergen.

c. Jika $L = 1$ maka tidak ada informasi.

Dengan $\mu_1 \neq 0, \ldots, \mu_n \neq 0$, $x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$, $a_{1_0} \neq 0, \ldots, a_{n_0} \neq 0$, serta $a_{1_1} \neq 0, \ldots, a_{n_1} \neq 0$ maka dengan tes rasio diatas diperoleh:

Kasus 1.

Jika $(v_1)_m = \mu_1{}^m\left[\frac{a_{1_0}}{(2m)!}x_1{}^{2m} + \frac{a_{1_1}}{(2m+1)!}x_1{}^{2m+1}\right]$ maka

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(v_1)_{m+1}}{(v_1)_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\mu_1{}^{m+1}\left[\frac{a_{1_0}}{(2m+2)!}x_1{}^{2m+2} + \frac{a_{1_1}}{(2m+3)!}x_1{}^{2m+3}\right]}{\mu_1{}^m\left[\frac{a_{1_0}}{(2m)!}x_1{}^{2m} + \frac{a_{1_1}}{(2m+1)!}x_1{}^{2m+1}\right]} = 0$$

Kasus 2.

Jika $(v_2)_m = \mu_2{}^m\left[\frac{a_{2_0}}{(2m)!}x_2{}^{2m} + \frac{a_{2_1}}{(2m+1)!}x_2{}^{2m+1}\right]$ maka

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(v_2)_{m+1}}{(v_2)_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\mu_2{}^{m+1}\left[\frac{a_{2_0}}{(2m+2)!}x_2{}^{2m+2} + \frac{a_{2_1}}{(2m+3)!}x_2{}^{2m+3}\right]}{\mu_2{}^m\left[\frac{a_{2_0}}{(2m)!}x_2{}^{2m} + \frac{a_{2_1}}{(2m+1)!}x_2{}^{2m+1}\right]} = 0$$

dan seterusnya proses ini dilakukan untuk barisan-barisan berikutnya.

Kasus n.

Jika $(v_n)_m = (-1)^m\mu_n{}^m\left[\frac{a_{n_0}}{(2m)!}x_n{}^{2m} + \frac{a_{n_1}}{(2m+1)!}x_n{}^{2m+1}\right]$ maka

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(v_n)_{m+1}}{(v_n)_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{(-1)^m\mu_n{}^{m+1}\left[\frac{a_{n_0}}{(2m+2)!}x_n{}^{2m+2} + \frac{a_{n_1}}{(2m+3)!}x_n{}^{2m+3}\right]}{(-1)^m\mu_n{}^m\left[\frac{a_{n_0}}{(2m)!}x_n{}^{2m} + \frac{a_{n_1}}{(2m+1)!}x_n{}^{2m+1}\right]} = 0$$

Dengan demikian, semua deret $\sum_{m=0}^{\infty}(v_1)_m, \sum_{m=0}^{\infty}(v_2)_m, \dots, \sum_{n=0}^{\infty}(v_n)_m$ adalah konvergen absolut.

Teorema: Misalkan deret kuasa $f(x)$ konvergen absolut untuk setiap $x \in (-R, R)$ dan terdefinisi:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

maka $f(x)$ adalah fungsi kontinu.

Berdasarkan teorema tersebut dapat disimpulkan bahwa masing-masing deret solusi dengan variabel terpisah adalah fungsi yang kontinu. Dengan demikian, perlu ditunjukkan kekontinuan dari solusi umum $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1(x_1)X_2(x_2)\dots X_n(x_n)$ dengan definisi berikut.

Definisi: Misalkan $A \subset R^n$ dan sebuah fungsi $u: A \to R$. Jika $c \in A$ maka fungsi u adalah kontinu pada c jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$:

$\|x - c\| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(c)| < \varepsilon$

Berdasarkan definisi tersebut maka kontinuitas solusi persamaan Laplace dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Fungsi $X_1, X_2, \dots, X_n: A \to R$ adalah fungsi yang kontinu dengan $A \subset R$ dan $u: A \text{ x } A \text{ x} \dots \text{x } A \to R$ dengan $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1(x_1)X_2(x_2)\dots X_n(x_n)$.

Misalkan $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in A \text{ x } A \text{ x} \dots \text{x } A$ dan $\varepsilon > 0$, akan ditunjukkan bahwa fungsi u adalah kontinu.

Karena $X_1(x_1)$ adalah fungsi kontinu maka $\exists\delta_1 > 0$ sedemikian $\forall x_1 \in A$, $|x_1 - c_1| < \delta_1 \Rightarrow |X_1(x_1) - X_1(c_1)| < \varepsilon$

Karena $X_2(x_2)$ adalah fungsi kontinu maka $\exists\delta_2 > 0$ sedemikian $\forall x_2 \in A$, $|x_2 - c_2| < \delta_2 \Rightarrow |X_2(x_2) - X_2(c_2)| < \varepsilon$

dan seterusnya.

Karena $X_n(x_n)$ adalah fungsi kontinu maka $\exists\delta_n > 0$ sedemikian $\forall x_n \in A$, $|x_n - c_n| < \delta_n \Rightarrow |X_n(x_n) - X_n(c_n)| < \varepsilon$

Dengan demikian juga,

$$\exists\delta_{n+1} > 0, \forall x_2 \in A, |x_2 - c_2| < \delta_{n+1} \Rightarrow |X_2(x_2) - X_2(c_2)| < 1$$

dan

$$\exists\delta_{n+2} > 0, \forall x_3 \in A, |x_3 - c_3| < \delta_{n+2} \Rightarrow |X_3(x_3) - X_3(c_3)| < 1$$

$$\vdots$$

$$\exists\delta_{2n-1} > 0, \forall x_n \in A, |x_n - c_n| < \delta_{2n-1} \Rightarrow |X_n(x_n) - X_n(c_n)| < 1$$

Kemudian

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (c_1, c_2, \dots, c_n)\| < \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_{n+1}, \dots, \delta_{2n-1})$$

$$\Rightarrow |x_1 - c_1| < \|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (c_1, c_2, \dots, c_n)\| < \delta \text{ dan}$$

$$|x_2 - c_2| < \|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (c_1, c_2, \dots, c_n)\| < \delta \text{ serta}$$

$$\vdots$$

$$|x_n - c_n| < \|(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (c_1, c_2, \ldots, c_n)\| < \delta$$

sehingga

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (c_1, c_2, \ldots, c_n)\| < \delta \Rightarrow |u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u(c_1, c_2, \ldots, c_n)|$$

$$= |X_1(x_1)X_2(x_2)\ldots X_n(x_n) - X_1(c_1)X_2(c_2)\ldots X_n(c_n)|$$

$$\leq |X_1(x_1) - X_1(c_1)||X_2(x_2)||X_3(x_3)|\ldots|X_n(x_n)| +$$
$$|X_2(x_2) - X_2(c_2)||X_1(c_1)||X_3(x_3)|\ldots|X_n(x_n)| +$$
$$|X_3(x_3) - X_3(c_3)||X_1(c_1)||X_2(c_2)|\ldots|X_n(x_n)| + \ldots +$$
$$|X_n(x_n) - X_n(c_n)||X_1(c_1)||X_2(c_2)|\ldots|X_{n-1}(c_{n-1})|$$

$$< \varepsilon[|X_2(x_2)||X_3(c_3)|\ldots|X_n(x_n)| + |X_1(c_1)||X_3(x_3)|\ldots|X_n(x_n)|$$
$$+ \quad |X_1(c_1)||X_2(c_2)|\ldots|X_n(x_n)| + \ldots +$$
$$|X_1(c_1)||X_2(c_2)|\ldots|X_{n-1}(c_{n-1})|]$$

$$< \varepsilon[(1 + |X_2(c_2)|)\ldots(1 + |X_n(c_n)|) +$$
$$|X_1(c_1)|(1 + |X_3(c_3)|)\ldots(1 + |X_n(c_n)|) +$$
$$|X_1(c_1)||X_2(c_2)|(1 + |X_4(c_4)|)\ldots(1 + |X_n(c_n)|) + \ldots +$$
$$|X_1(c_1)||X_2(c_2)|\ldots|X_{n-1}(c_{n-1})|]$$
$$< k\varepsilon$$

Dimana $k = [(1 + |X_2(c_2)|)\ldots(1 + |X_n(c_n)|) + |X_1(c_1)|(1 + |X_3(c_3)|)\ldots$
$(1 + |X_n(c_n)|) + |X_1(c_1)||X_2(c_2)|(1 + |X_4(c_4)|)\ldots(1 + |X_n(c_n)|) + \cdots$
$+ |X_1(c_1)||X_2(c_2)|\ldots|X_{n-1}(c_{n-1})|]$

Konstanta k adalah faktor pengali ε dengan k adalah bilangan riel positif sehingga jelas dapat dilihat bahwa ketidaksamaan diatas adalah benar untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan mensubstitusi $\frac{\varepsilon}{k}$ terhadap ε maka fungsi $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah sebuah fungsi kontinu pada $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Metode pemisahan variabel dan metode deret kuasa solusi adalah dua metode yang bekerja sama dengan baik untuk menunjukkan deret kuasa solusi persamaan Laplace pada dimensi n. Deret kuasa solusi umum yang diperoleh adalah perkalian dari n deret-deret kuasa dengan variabel yang terpisah. Semua deret-deret kuasa dengan variabel terpisah yang diperoleh adalah konvergen absolut dan kontinu. Solusi umum persamaan Laplace dimensi n bersifat konvergen absolut dan kontinu.

Saran

Beberapa jurnal penelitian dan karya ilmiah dan tulisan ini menunjukkan deret solusi persamaan Laplace dengan terlebih dahulu melakukan penyederhanaan pesamaan differensial parsial menjadi persamaan differensial biasa dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Perlu dikaji lebih lanjut penggunaan metode deret solusi ataupun metode deret kuasa solusi secara utuh pada persamaan-persamaan differensial parsial.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle R. G., 1976, The Element of Real Analysis, Jhon Wiley & Sons Inc. Canada.

Gaughan D. E., 1987, Introduction to Analysis, Wadsworth Inc, Belmont, California, USA.

Güzel N., Bayram M., 2005, Power Series Solution of Non-Linear First Order Differential Equations Systems, *Trakya Univ. J. Sci*., 6(1): 107-111, Turkey.

Jing-Jing F., Ling H., Shi-Jie Y., 2011, Solutions of Laplace Equation in *n*-Dimensional Spaces, *Journal of Communications in Theoretical Physics*, vol. 56 (2011) 623-625, China.

Read W. W., 1993, Series Solutions For Laplace's Equation With Nonhomogeneous Mixed Boundary Conditions And Irreguler Boundaries, *J. Mathl. Comput. Modelling* Vol. 17, No. 12, pp. 9-19, Great Britain.

Stirling D. S. G., 1987, Mathematical Analysis: A Fundamental and Straightforward Approach, John Wiley & Sons, New York.

Tenenbaum M., dan Pollard H., 1963, Ordinary Differential Equations, Harver & Row, Publishers, Inc,. New York.

Thandapani E., Balachandran K., Balasubramanian, 1988. Series Solutions of Some Nonlinear Differential Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 23, 103-107, North Holland